სალექციო კურსების ელექტრონული ბიბლიოთეკა

მალხაზ გოჩიტაშვილი

მოდელირება ეკოლოგიაში

მოდელირება ეკოლოგიაში

ივანე ჯავახიშვილის სახელობის
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო
მეცნიერებათა ფაკულტეტი

მალხაზ გოჩიტაშვილი

მოდელირება ეკოლოგიაში

უნივერსიტეტის
გამომცემლობა

მოცემულ ნაშრომს საფუძვლად დაედო ლექციების საბაკალავრო კურსი, რომელიც წლების განმავლობაში იკითხებოდა ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტზე. მასში შეტანილია როგორც კურსის თეორიული ნაწილი, ასევე, პრაქტიკული მაგალითები და ამოცანები ეკოლოგიაში და ფიზიკაში. ამოცანები ამოხსნილია კომპიუტერული პროგრამების “Origin” და “MaTlab” გარემოში.

რედაქტორი პროფ. ოლეგ ხარშილაძე

რეცენზენტი პროფ. ზაალ მაჭავარიანი

გამოცემულია ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის საუნივერსიტეტო საგამომცემლო საბჭოს გადაწყვეტილებით.

ISBN 978-9941-13-707-5 (pdf)

შინაარსი

თავი I. ეკოლოგიური პროცესების კომპიუტერული მოდელირება 7

§1. სისტემური ეკოლოგია და მათემატიკური მოდელირება 7

1.1. შავი ყუთის პრინციპი 7
1.2. მოდელის აგების მიზანი 8
1.3. მუშა პარამეტრები 8
1.4. ეკოლოგიის გამოყენებითი ამოცანების მოდელირება 8

§2. პოპულაციური დინამიკა 9

2.1. ამოცანა: მტაცებელი მსხვერპლი 9
2.2. ფიბონაჩის მწკრივი 10
2.3. ექსპონენციალური ზრდის კანონი 10
2.4. შეზღუდული ზრდა 11

§3. მათემატიკური მოდელების გამოყენება ეკოლოგიურ კვლევებში 12

3.1. სტატიკური დეტერმინირებული მოდელი 13
3.2. ორგანული ნარჩენებით წყლის დაბინძურების მოდელი 13
3.3. დიდი ხანძრის პირობებში ატმოსფეროში დაბინძურების გავრცელების მოდელირება... 14
3.4. ფიზიკური ანალოგიის გამოყენება ეკოლოგიურ პროცესებში.......................... 16
3.5. ექსპლუატირებული პოპულაციის მოდელი 17
3.6. პოპულაციების ურთიერთქმედება 18
3.7. ლიმიტირების სუბსტრატის კონცენტრაციის გავლენა გამრავლების სიჩქარეზე. მონოს განტოლება 20
3.8. ლიმიტირებული პოპულაცია ზრდის ლოჯისტიკური კანონით 23
3.9. განზოგადებული ლოჯისტიკური განტოლება 25

§4. დაგვიანების ფაქტორის გათვალისწინება ეკოსისტემის განვითარების დინამიკაში 29

4.1. უკუკავშირი დაგვიანებით 30
4.2. გამრავლების სეზონის პერიოდულობა 31
4.3. დაგვიანების გამომწვევი ფაქტორები, რომლებიც რაოდენობას ზღუდავენ 31
4.4. პოპულაციის დინამიკა პერიოდულ გარემოში 32

თავი II. მათემატიკური და ფიზიკური ამოცანების ამოხსნა MATLAB-ის გარემოში 34

§1. მარტივი მაგალითები 34
§2. ვექტორების წარმოდგენა მატრიცული სახით 35
§3. ალგებრული და ტრანსცენდენტული განტოლებების ამოხსნის ტექნოლოგია .. 38

3.1. ფუნქცია solve () 39
3.2. განტოლების ნამდვილი ფესვების პოვნა ფუნქცია fzero-ს საშუალებით 40
3.3. მრავალწევრის ფესვის მოძებნა ბრძანება roots( )-ის დახმარებით 42
3.4. წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა 43

§4. ფუნქციების გრაფიკების აგება 43
4.1. არაცხადი ფუნქცია 46
4.2. წარმოსახვითი და კომპლექსური მონაცემები 47
4.3. ზედაპირის აგება 47
§5. ფუნქციის ზღვარი და ინტეგრალი 48
5.2. ფუნქციის მაქსიმუმის პოვნა 49
5.3. ინტეგრალის ამოხსნა 50
5.4. ფუნქცია quad('fun',a,b).......... 54
5.5. ფუნქცია dblquad('fun',a,b,c,d) 54
§6. განაწილების ფუნქციის აგება 55
§7. რხევები და ტალღები 60
7.1. ლისაჟუს ფიგურები 60
7.2. ძგერის მოვლენა 62
7.3. რხევის განტოლება 64
7.4. ბგერითი ტალღა 66
7.5. მილევადი რხევის განტოლება 66
§8. ნაწილაკის მოძრაობა ცენტრალური სიმეტრიის ველში 67
§9. დიფუზიის მოვლენა (ქაოსური მოძრაობა) 70
§10. ფურიე ანალიზი 72
10.1. მზის აქტივობის ციკლი 72
10.2. ერთგანზომილებიანი სწრაფი ფურიე გარდაქმნა 75
§11. ანიმაციური გრაფიკა 76
§12. არაწრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა 78
თავი III. დიფერენციალური განტოლებების ამოხსნა MATLAB-ის გარემოში 80
§1. წრფივი და არაწრფივი დიფგანტოლებების ამოხსნა dsolve გამოყენებით 80
§2. არაწრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა ამოხსნა ode 23 და ode 45 -ის გამოყენებით 82
თავი IV. ეკოლოგიური ამოცანები “MATLAB”-ის გარემოში 84
§1. ლოჯისტიკური დიფერენციალური განტოლება 84
§2. ლოტკა-ვოლტერას განტოლება 87
თავი V. ეკოლოგიური და ფიზიკური ამოცანები “ORIGIN”-პროგრამის გარემოში 89
§1. მალთუსის კოეფიციენტის და პოპულაციის ტევადობის განსაზღვრა 89
§2. მონაცემების ფურიე ანალიზი 96
§3. სპექტროსკოპული მონაცემების დამუშავება “Origin”-პროგრამულ გარემოში 101
ლიტერატურა 107

თავი I

ეკოლოგიური პროცესების კომპიუტერული მოდელირება

§1. სისტემური ეკოლოგია და მათემატიკური მოდელირება

ეკოლოგიურ ამოცანებში სისტემური ანალიზური მიდგომის და მათემატიკური მეთოდების გამოყენებას ***სისტემური ეკოლოგია ეწოდება.***

ნებისმიერ სისტემაზე ფიზიკური ან ბიოლოგიური წარმოდგენების მათემატიკური განტოლებების გამოყენებით ასახვას ***სისტემური ანალიზი*** ეწოდება. სისტემის მათემატიკურ აღწერას ***მოდელი*** ეწოდება. მოდელი წარმოადგენს ბუნების, ეკოსისტემის აბსტრაქტულ ასახვას.

სისტემურ ანალიზში, აბსტრაქტული მოდელის შექმნისას, გათვალისწინებულია რეალური სისტემის სირთულე;

სისტემური ანალიზი არის მეთოდი, რომელიც გვეხმარება, გავიგოთ, როგორ არის მოწყობილი სისტემა და როგორ ფუნქციონირებს – „მუშაობს"-ის.

ეკოლოგიური სისტემის აღწერა და სისტემის განვითარების წინასწარი განჭვრეტა მოდელის ფარგლებში ეყრდნობა ორ ურთიერთდაკავშირებულ იდეას:

- შავი ყუთის პრინციპს;
- იერარქიული ორგანიზაციის პრინციპს (ანუ ინტეგრაციული დონეების პრინციპს).

1.1. შავი ყუთის პრინციპი

სისტემის რომელიმე ელემენტის წინასწარმეტყველებისათვის არაა საჭირო იმის ცოდნა, როგორაა ის შიგნით მოწყობილი.

შავი ნიშნავს იმას, რომ ინფორმაცია, თუ რა არის მის შიგნით, არ არსებობს ან არ გამოიყენება. საკმარისია, ვიცოდეთ მისი **„შესავალი",** საიდანაც ხდება მასზე გარე ზემოქმედება და **„გამოსავალი",** რომლის საშუალებითაც ის მოქმედებს სისტემის სხვა ელემენტებზე. ასევე უნდა ვიცოდეთ კანონზომიერება, რომელიც აკავშირებს **„გამოსავალს" → „შესავალთან".** მაგალითად, უჯრედის ფიზიოლოგიური ფუნქციების აღწერისთვის აუცილებელი არ არის, ამომწურავად ვიცოდეთ მისი ბიოქიმია.

იერარქიული ორგანიზაციის პრინციპის დროს სისტემა შეიძლება წარმოვიდგინოთ, როგორც იერარქიული სტრუქტურა, რომელიც შედგება **„შავი"** ყუთებისაგან. მაგალითად, ეკოსისტემის აღწერისთვის აუცილებელი არ არის ცხოველთა ყველა **პოპულაციის დინამიკის** სრული აღწერა, ხოლო **პოპულაციის დინამიკის** აღწერისთვის – ფიზიოლოგიის საფუძვლების ცოდნა.

1.2. მოდელის აგების მიზანი

მოდელი შეიძლება შეფასდეს სამი ძირითადი თვისების მიხედვით: **რეალისტუ-რობის, სიზუსტის** და **ზოგადობის.**

რეალისტურობა გვიჩვენებს რამდენად (რა ხარისხით) შეესაბამება წარმოდგე-ნილი მათემატიკური მოდელი რეალობას.

სიზუსტე მოდელის თვისებაა, **რაოდენობრივად** ვიწინასწარმეტყველოთ ცვლილებები მოდელირებად ობიექტში.

ზოგადობა მოდელის გამოყენების დიაპაზონია – სხვადასხვა სიტუაციის რიც-ხვი, რომლებშიც მოდელი მუშაობს და იძლევა რეალურთან მიახლოებულ პასუხს.

1.3. მუშა პარამეტრები

ეკოსისტემის აღწერა სივრცეში და დროში ძალიან რთულია. მოდელებში ისინი შეიძლება დახასიათდეს „მუშა პარამეტრების“ სიმრავლით (ენერგია, ბიოპროდუქ-ტულობა, პოპულაციის სიდიდე და სხვა).

მოდელები ხშირად ფასდება მათი ზოგადობის ან იმის მიხედვით, რაც მიუთი-თებს **ძირითად ტენდენციებზე** და არა **რაოდენობრივი პროგნოზირების** სიზუს-ტეზე.

1.4. ეკოლოგიის გამოყენებითი ამოცანების მოდელირება

ასეთი ამოცანების მიზანია **სიზუსტე.** მაგალითად, თევზეულის წარმოებაში მნიშვნელოვანია, ვიწინასწარმეტყველოთ თევზის ზრდის სიჩქარე და ზომა. მოდე-ლირება საშუალებას იძლევა, რომ ორივე პარამეტრი შეფასდეს მაღალი სიზუსტით.

გამოყენებით მოდელებში მნიშვნელოვანი ადგილი უკავიათ ატმოსფეროში და წყლებში მიმდინარე ფიზიკური, ქიმიური და ბიოლოგიური პროცესების მოდელირე-ბას. განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია მოდელები, რომლებიც აღწერენ დამაბინძუ-რებელი ნივთიერებების გავრცელებას გარემოში და მათ გავლენას **ბიოსისტემებ-ზე, ადამიანებზე.**

ეკოლოგიურ-ეკონომიკური სისტემების მოდელირება გამოიყენება **ადამიანი-სა და გარემოს** ურთიერთქმედების-ურთიერთგავლენის შესწავლის მიზნით, რო-გორც ლოკალური, ასევე ფართომასშტაბიანი პრობლემების გადასაწყვეტად. მაგა-ლითად, წყალსაცავის მშენებლობისას მნიშვნელოვანია პლატინის პარამეტრების შერჩევა.

ფართომასშტაბიან ამოცანა არის ცივილიზაციის ურთიერთქმედება მთლიანად ბიოსფეროსთან.

ექსპერიმენტული მონაცემების ანალიზის მოდელი

ეკოლოგიური პროცესი იყოფა მარტივ ქვეპროცესებად, ანუ „ექსპერიმენტულ კომპონენტებად“. თითოეული კომპონენტი შეისწავლება ექსპერიმენტულად და აღიწერება მარტივი განტოლებით ან განტოლებათა სისტემით. ამის შემდეგ ხდება

ქვეპროცესების გაერთიანება, რომელიც წარმოადგენს რთულ მათემატიკურ ამოცანას. ასეთი აღწერისას ძირითადი ყურადღება ექცევა თვისობრივ სურათს და არა რაოდენობრივ მონაცემებს.

§2. პოპულაციური დინამიკა

პოპულაციური დინამიკა მათემატიკური ბიოლოგიის საგანია. იგი აღწერს პოპულაციის რიცხობრივ ცვლილებას დროში.

პროდუქციული პროცესი ცოცხალი სისტემის თვისებაა, შექმნას ბიომასა სინათლის, არაორგანული და ორგანული ნივთიერებებისა და სხვა ბიომასების გადამუშავებისას მიღებული ენერგიის ხარჯზე. პროდუქციული პროცესი მოიცავს დაბადებას, ზრდას, შერჩევას, ურთიერთქმედებას გარემოსთან და სხვა სახეობების წარმომადგენლებთან, სიკვდილს. ეს გარემოება საშუალებას გვაძლევს, გამოვიყენოთ მსგავსი მათემატიკური აპარატი (ზრდისა და განვითარების მოდელისათვის) ისეთი განსხვავებული – სხვადასხვა დონეზე მყოფი ცოცხალი მატერიისათვის, როგორიცაა, მაგალითად, უჯრედოვანი პოპულაცია და სახეობების ერთობლიობა ეკოსისტემაში.

დინამიური თვალსაზრისით, ევოლუციის პროცესში ორგანიზმების ზრდა და შერჩევა ხდება **„კინეტიკური სრულყოფის“** პრინციპით (შნოლი 1979 წ). ფიზიოლოგიური პროცესების მიმდინარეობისას სრულყოფა და პროცესების განვითარება ოპტიმალური მიმართულებით ხდება. ეს პრინციპი შეიძლება ჩამოყალიბდეს სხვანაირადაც: შემთხვევითობა აუცილებელია იმისათვის, რომ მოიძებნოს ახალი გზები, მიმართულებები ორგანიზმების, ეკოსისტემების, ბიოსფეროს ფუნქციონირებისას ცვლად გარემოში.

2.1. ამოცანა: მტაცებელი მსხვერპლი

მსხვერპლის რაოდენობა აღვნიშნოთ X_1-ით, მტაცებლის – X_2-ით. მსხვერპლის რაოდენობის ზრდის სიჩქარე პროპორციულია თვითონ მისი რაოდენობის (მალთუსის კანონი), რომელსაც აკლდება მტაცებლის მიერ განადგურებული რაოდენობა.

$$\frac{\Delta X_1}{\Delta t} = k_1 X_1 - \eta X_2 \qquad (1)$$

η-მსხვერპლის განადგურების კოეფიციენტია, k_1 – გამრავლების კოეფიციენტი. გამრავლების კოეფიციენტი დამოკიდებულია მტაცებლის რაოდენობაზე, რადგან მტაცებელი აფერხებს „მსხვერპლის“ გამრავლებას.

$$k_1 = \alpha - \beta X_2 \qquad (2)$$

α, β, η – მუდმივი სიდიდეებია.

მტაცებლის რაოდენობის ზრდა ემორჩილება მალთუსის კანონს და, გარდა ამისა, სტიმულირდება მსხვერპლის რაოდენობით:

$$\frac{\Delta X_2}{\Delta t} = k_2 X_2 + \mu X_1, \qquad (3)$$

სადაც k_2 ასევე წრფივადაა დამოკიდებული მსხვერპლის რაოდენობაზე:

$$k_2 = \gamma + \lambda X_1 \tag{4}$$

μ, γ, λ მუდმივებია. საბოლოოდ მივიღებთ გადაბმულ განტოლებათა სისტემას:

$$\frac{dX_1}{dt} = \alpha X_1 - \beta X_1 X_2 - \eta X_2$$

$$\frac{dX_2}{dt} = \gamma X_2 + \lambda X_1 X_2 + \mu X_2 \tag{5}$$

როცა $\eta = 0$ და $\mu = 0$, მიიღება ვოლტერას განტოლებათა სისტემა.

2.2. ფიბონაჩის მწკრივი

პირველი ნაშრომი, რომელმაც ჩვენამდე მოაღწია და აღწერს პოპულაციის დინამიკის მოდელს, არის 1202 წლით დათარიღებული, უდიდესი იტალიელი მეცნიერის, ლეონარდო ფიბონაჩის „ტრაქტატი თვლის შესახებ" ("Liber abaci"). ამ ნაშრომში განხილულია შემდეგი ამოცანა: ვილაცას გამოჰყავს კურდღლები მაღალი კედლებით შემოსაზღვრულ სივრცეში. ისმება კითხვა: რამდენი წყვილი კურდღელი იბადება წელიწადში ერთი წყვილისაგან, თუ ერთ თვეში წყვილი ბადებს სხვა ახალ წყვილს. დავუშვათ, რომ კურდღლები შობადობას იწყებენ თავისი დაბადებიდან მხოლოდ მეორე თვიდან. ამოცანის ამონახსნი წარმოადგენს რიცხვების მწკრივს:

1, 1, 2, 3, 5, 8,13, 21, 34, 55, 89,144, 233, 377 ... თვითონ ფიბონაჩიმ მწკრივიდან ამოილო პირველი ორი წევრი. ეს მწკრივი ისტორიაში შევიდა, როგორც ფიბონაჩის მწკრივი, ხოლო მისი წევრები – ფიბონაჩის რიცხვების სახელით. 12 თანამიმდევარი რიცხვი გვაძლევს კურდღლების თვიურ ნამატს. თითოეული შემდეგი ელემენტი მწკრივში წინა ორის ჯამის ტოლია. მწკრივის წევრებისათვის რეკურენტული ფორმულა 1634 წ. ფრანგმა მათემატიკოსმა ალბერტ გირერმა ჩაწერა:

$$U_{n+2} = U_{n+1} + U_n \tag{6}$$

მათემატიკოსმა გლაზგოდან, რობერტ სიმპსონმა 1753 წელს შეამჩნია, რომ რიგითი ნომრის გაზრდასთან ერთად უკანასკნელი წევრის შეფარდება წინასთან ზღვარში a რიცხვისაკენ მიისწრაფის, რომელსაც „ოქროს კვეთი" ეწოდება, რომელიც ტოლია 1.618... ან

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

2.3. ექსპონენციალური ზრდის კანონი

მოდელი აღწერს პოპულაციის რიცხვის ზრდის დინამიკას. ზრდის დინამიკა შეიძლება წარმოვადგინოთ გეომეტრიული პროგრესიის სახით, რომელშიც ყოველი მომდევნო ელემენტი დაკავშირებულია წინა ელემენტთან თანაფარდობით $A_{n+1} = qA_n$. როცა ელემენტების რიცხვი იზრდება და სხვაობა წინა და მომდევნო ელემენ-

ტების მნიშვნელობებს შორის მნიშნელოვნად მცირდება, დისკრეტული რიცხვები შეგვიძლია შევცვალოთ უწყვეტი X ცვლადით და გეომეტრიული პროგრესიის ნაცვლად, გამოვიყენოთ განტოლება:

$$\frac{dX}{dt} = rX. \tag{7}$$

1798 წელს ეს მოდელი მალთუსმა წარმოადგინა თავის კლასიკურ ნაშრომში „მოსახლეობის ზრდის შესახებ“. მან ყურადღება გაამახვილა იმ ფაქტზე, რომ პოპულაციის რიცხოვნობა ექსპონენციალურად იზრდება მაშინ, როცა პროდუქტების წარმოების ზრდის კანონი წრფივია. გაკეთდა დასკვნა, რომ ადრე თუ გვიან ექსპონენტა „გაასწრებს“ (მნიშვნელობა გახდება მეტი) წრფივ ფუნქციას და დადგება შიმშილის (პროდუქტების ნაკლებობის) პერიოდი.

დარვინმა დაასკვნა, რომ არსებობენ ფაქტორები, რომლებიც ანელებენ შემოუსაზღვრავი ზრდის ტემპს. ესაა *რესურსების უკმარისობა,* ტერიტორიების სიმცირე და სხვა. ამის გამო წარმოიშობა კონკურენცია – ბრძოლა პოპულაციის შიგნით, მტაცებლობა სხვა სახეობებთან მიმართებით. ეს ფაქტორები ამცირებენ ზრდის სიჩქარეს და პოპულაციის რიცხოვნობა გადის სტაციონარულ დონეზე.

2.4. შეზღუდული ზრდა

ფერხიულსტმა 1848 წელს თავის ნაშრომში „ლოჯისტიკური ზრდის კანონი“ აღწერა სისტემური ფაქტორი, რომელიც შემოსაზღვრავს პოპულაციის ზრდას:

$$\frac{dX}{dt} = rX\left(1 - \frac{X}{K}\right). \tag{8}$$

მცირე X-ებისთვის რიცხოვნობა იზრდება ექსპონენციალური კანონით (მალთუსის კანონი), დიდი X-ებისთვის კი მიისწრაფვის გარკვეული ზღვრისაკენ, რომელსაც პოპულაციის ტევადობა ეწოდება. ტევადობის სიდიდე განისაზღვრება საკვები რესურსების შემოსაზღვრულობით, გამრავლების ადგილების – ტერიტორიების შეზღუდულობით და სხვა ბევრი ფაქტორით, რომლებიც შეიძლება სხვადასხვა იყოს სხვადასხვა სახეობისათვის. შეზღუდული ზრდის კანონის თვალსაჩინოებისათვის მოვიყვანოთ მაგალითები:

ფერხიულსტის განტოლება შეიძლება გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\frac{dX}{dt} = rX - \delta X^2. \tag{9}$$

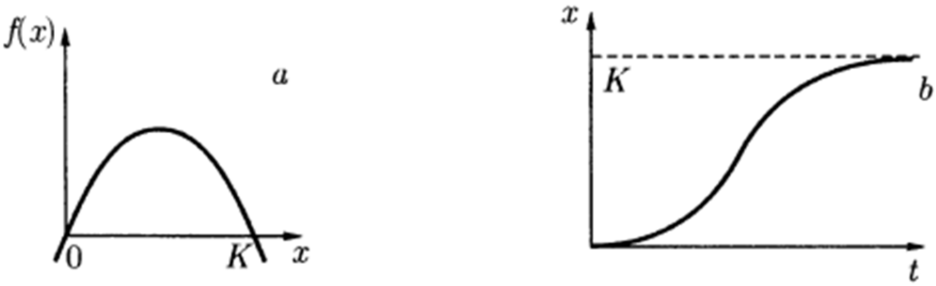
ეს განტოლება შეიძლება ამოიხსნას ანალიზური სახით:

$$X(t) = \frac{KX_0}{X_0 + (K - X_0)\exp[-rt]}. \tag{10}$$

აღსანიშნავია, რომ ბუნებაში პოპულაციას აქვს არა მარტო მაქსიმალური რიცხოვნობა, რომელიც განისაზღვრება *K* სიდიდით, არამედ – მინიმალური, კრიტიკული სიმკვრივე *L*. როდესაც რიცხოვნობა ეცემა კრიტიკულის ქვემოთ, არახელსაყ-

რელი პირობების ან მტაცებელთა მოქმედების გამო, პოპულაციის აღდგენა შეუძ-ლებელია, ის იღუპება.

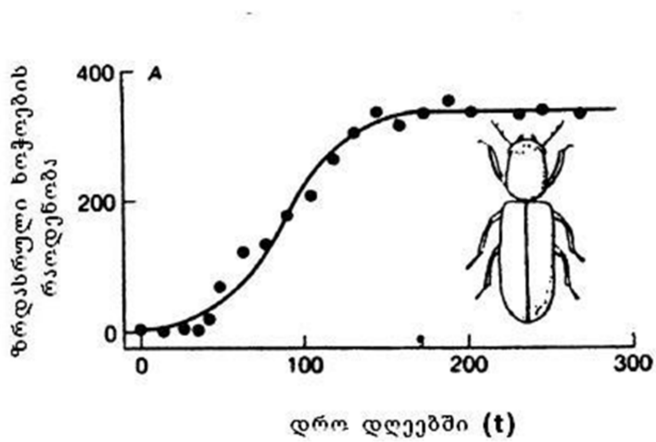
ქვედა კრიტიკული სიმკვრივის სიდიდე სხვადასხვაა განსხვავებული სახეობე-ბისათვის. ბიოლოგიურმა გამოკვლევებმა აჩვენა, რომ ეს სიდიდე შეიძლება იყოს წყვილი ათას კვადრატულ კილომეტრზე „ანდატრის" შემთხვევაში და ასეული ათა-სი „მოხეტიალე „ ამერიკული მტრედისათვის.



შეზღუდული ზრდის სიჩქარის $f(x) = \frac{dX}{dt}$ დამოკიდებულება რიცხოვნობაზე

რიცხოვნობის დროზე დამოკიდებულება

ნახ. 1. შეზღუდული ზრდის ლოჯისტიკური განტოლების ამოხსნის შედეგები



ნახ. 2. ხოჭოების რაოდენობის ზრდის დინამიკა პურის მარცვლეულის 10-გრამიან ულუფაში

§3. მათემატიკური მოდელების გამოყენება ეკოლოგიურ კვლევებში

მათემატიკური მოდელები პირობითად შეიძლება დავყოთ ოთხ კლასად:

1. სტატიკური დეტერმინირებული მოდელები;
2. სტატიკური სტოქასტიკური მოდელები;
3. დინამიური დეტერმინირებული მოდელები;
4. დინამიური სტოქასტიკური მოდელები.

3.1. სტატიკური დეტერმინირებული მოდელი

განვიხილოთ ეკონომიკურ-გეოგრაფიული შინაარსის ამოცანა. ვთქვათ, არსებობენ დასახლებული A_i პუნქტები, რომლებიც აწარმოებენ პროდუქციას a_i მოცულობით. დავუშვათ, B_j პუნქტებს აქვთ ამ პროდუქციაზე მოთხოვნა. მათი შესაბამისი მოთხოვნილების მოცულობაა b_j. აღვნიშნოთ S_{ij}–თი ერთეული პროდუქტის ტრანსპორტირების ღირებულება (ხარჯები) A_i პუნქტიდან B_j პუნქტებში. აღვნიშნოთ X_{ij} -თი A_i-დან B_j-ში გადაზიდული პროდუქციის მოცულობა. აუცილებელია პროდუქციის გადაზიდვა განხორციელდეს მინიმალური სატრანსპორტო დანახარჯებით. მათემატიკურად მოცემული ამოცანა ჩამოყალიბდება შემდეგნაირად: ვიპოვოთ გადაზიდვების ჯამური ღირებულების $Z(X)$ ფუნქციის მინიმალური მნიშვნელობა.

$$Z(X) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} S_{ij}\,. \tag{11}$$

ამ განტოლებას ედება სასაზღვრო პირობები:

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = a_i (i = 1,2,3 \dots\dots m), \sum_{i=1}^{m} X_{ij} = b_j \,(j = 1,2,3 \dots\dots n), X_{ij} \geq 0\,. \tag{12}$$

3.2. ორგანული ნარჩენებით წყლის დაბინძურების მოდელი

განვიხილოთ სისტემა, რომელიც შედგება წყლისაგან, მასში გახსნილი ჟანგბადისა და ორგანული ნარჩენებისაგან. წყალში გახსნილი წყალბადის კონცენტრაცია და ორგანული ნარჩენების კონცენტრაცია ურთიერთკავშირშია. ნარჩენები იშლებიან ბაქტერიების ზემოქმედებით. ამ დროს მიმდინარეობს ჟანგვის რეაქცია, რომელიც მოიხმარს ჟანგბადს. ნარჩენების კონცენტრაცია შეიძლება გაიზომოს ე. წ. ჟანგბადის ბიოქიმიური მოთხოვნილებიდან (ჟბმ), რომელიც ტოლია წყლის ერთეულოვან მოცულობაში გახსნილი ჟანგბადის იმ რაოდენობის, რომელიც აუცილებელია ნარჩენების დაშლისათვის. ჟბმ იზომება იგივე ერთეულებში, რომლებშიც ჟანგბადის კონცენტრაცია (მაგალითად, მგ/ლ).

აღვნიშნოთ $L(t)$-თი ნარჩენების კონცენტრაცია t დროის მომენტში. ჩავთვალოთ, რომ ნარჩენების დაშლის სიჩქარე მათი კონცენტრაციის პროპორციულია. ეს პირობა სრულდება იმ შემთხვევაში, თუ წყალში ჟანგვის პროცესის მიმდინარეობისათვის ჟანგბადის საკმარისი რაოდენობაა.

$$\frac{dL}{dt} = -K_1 L\,, \tag{13}$$

K_1 არის ჟანგბადის მოხმარების კოეფიციენტი (1/დღე).

აღვნიშნოთ C_0-ით წყალში ჟანგბადის წონასწორული კონცენტრაცია, როცა არ გვაქვს ორგანული ნარჩენები, C_t-თი ჟანგბადის ფაქტობრივი კონცენტრაცია დროის მოცემულ მომენტში. სხვაობა $D(t) = C_0 - C_t$ განსაზღვრავს ჟანგბადის დეფიციტის სიდიდეს წყალში. $D(t)$ დეფიციტის სიდიდე t დროის განმავლობაში შეიძლება

გაიზარდოს ჟანგბადის დახარჯვის გამო დაჟანგვის პროცესში. თუმცა ბუნებაში არსებობს საწინააღმდეგო ტენდენციებიც, რომლებიც წყალში ზრდიან ჟანგბადის კონცენტრაციას წყლის ზედაპირული ფენის მიერ ჟანგბადის შთანთქმის პროცესში. ამ პროცესს რეაერაცია ეწოდება. დეფიციტის დინამიკა აღიწერება განტოლებით:

$$\frac{dD}{dt} = k_1 L - k_2 D\,, \tag{14}$$

k_2 რეაერაციის კოეფიციენტია (1/დღე).

განტოლებებს ემატება სასაზღვრო პირობები:

$$D(0) = D_0\,, L(0) = L_0 \tag{15}$$

ამ ამოცანის ამონახსნს შემდეგი სახე აქვს:

$$D(t) = \frac{k_1 L_0}{k_2 - k_1}\left(e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}\right) + D_0 e^{-k_2 t}\,, \tag{16}$$

$$D_{max} = L_0 \frac{k_1}{k_2}\left[\frac{k_2}{k_1}\left(1 - \frac{D_0(k_2 - k_1)}{k_1 L_0}\right)\right]^{\frac{k_1}{k_1 - k_2}}. \tag{17}$$

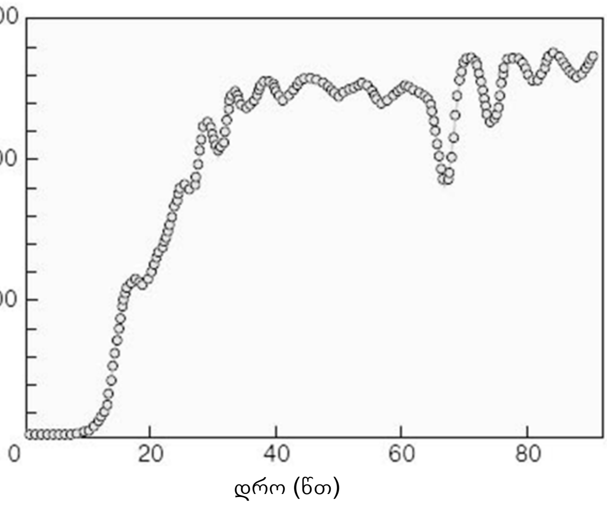
3.3. დიდი ხანძრის პირობებში ატმოსფეროში დაბინძურების გავრცელების მოდელირება

დიდი ხანძრის პირობებში ატმოსფეროში ვრცელდება დიდი რაოდენობით აეროზოლის ნაწილაკები ჭვარტლისა და ფერფლის სახით. წვის პროდუქტების გავრცელებამ ატმოსფეროში შეიძლება მნიშვნელოვანი კლიმატური ცვლილებები გამოიწვიოს, როგორც ლოკალური, ასევე გლობალური მასშტაბით. გლობალური ცვლილებები შეიძლება მოყვეს ბირთვულ აფეთქებასაც, რომელსაც ახლავს ხანძარი დიდ ფართობზე.

გამოკვლევების საფუძველზე ჩამოყალიბდა ბირთვული ზამთრის კონცეფცია, რომლის თანახმად, წვის პროდუქტები, ატმოსფეროში ასვლისას, გასცდებიან ტროპოსფეროს (11-19 კმ) და მოხვდებიან სტრატოსფეროში. სტრატოსფეროდან ჭვარტლი და ფერფლი გამოდის ძალიან ნელა, რადგან წვიმის ღრუბლები იმყოფებიან ტროპოპაუზაში და უფრო ქვემოთ. შედეგად, წვის პროდუქტები ფარავენ დედამიწის დიდ ნაწილს, ეკრანირებას უკეთებენ მზის სხივებს, რაც მიგვიყვანს ძლიერ აცივებამდე, ამინდის გლობალურ ცვლილებამდე. ასეთი ბირთვული ზამთრის ხანგრძლივობა შეიძლება გაგრძელდეს რამდენიმე თვიდან 1 წლამდე.

გაკეთდა ასეთი პროცესების მოდელირების მნიშვნელოვანი თეორიული გათვლები. ენერგიის წყაროს წარმოადგენდა *R*-რადიუსისა და *h*-სიმაღლის (100 მ) მოცულობის წყარო. მოცულობითი წყაროს ინტენსივობა Q^* იცვლებოდა Q_{max}-მდე 30 წთ-ის განმავლობაში და შემდეგ ინარჩუნებდა მუდმივ სიდიდეს. 60 წთ-ის შემდეგ ხდებოდა წყაროს გათიშვა. განიხილებოდა ხანძრის კერა 5-დან 33 კმ-მდე. ენერგიის გამოყოფის მაქსიმალური სიმძლავრე შეადგენდა q_{max}=0.05მგ ვატი/მ^2 .

თვისობრივად სახეზეა შემდეგი დინამიკა. ნარევი მოძრაობს ზევით თბილ ჰაერთან ერთად არქიმედეს ძალების გავლენით. ამასთან, ჰაერის ნაკადი ცეცხლის კერის მახლობლობაში მიემართება ცენტრისკენ და შემდეგ იწყებს მოძრაობას ზევით. საწყის სტადიაზე ჰაერი და ნარევი აკრეფენ სიჩქარეს და მიემართებიან ზევით, გასცდებიან წონასწორულ სიმაღლეს და გაიშლებიან უკან დაბრუნებისას. გაშლის ზომა დაახლოებით 2-ჯერ ნაკლებია მაქსიმალური ასვლის სიმაღლესთან შედარებით. ნარევის ასვლის სიმაღლე აღმოჩნდა ტროპოპაუზის ზედა საზღვარზე უფრო მცირე. ანუ ნარევი არ გადის სტრატოსფეროში. საინტერესოა, აღინიშნოს ის ფაქტი, რომ ნარევის ასვლის პროცესს ახლავს ტურბულენტობა, რომელიც მნიშვნელოვან გავლენას ახდენს ასვლის სიმაღლეზე. მაგალითად, თუ ცეცხლის კერა შეადგენს 5კმ რადიუსის ფართს, მაშინ, ტურბულენტობის გათვალისწინების შემთხვევაში, ასვლის სიმაღლე იქნება 25კმ.



ნახ. 3. ხანძრის შემთხვევაში ფერფლის და ჭვარტლის გავრცელების სიმაღლის დროზე დამოკიდებულება

მაქსიმალური სიმაღლე

$$Z_{max} = Aq_i^{1/4}\,, \qquad (18)$$

Z_{max} იზომება კილომეტრებში, A უგანზომილებო კონსტანტაა, რომელიც განისაზღვრება ექსპერიმენტულად ან დაითვლება თეორიულად. აღმოჩნდა, რომ როცა ცეცხლის კერის რადიუსი $R = 5$კმ-ს, $A = 0.255$ იძლევა მაქსიმალური სიმაღლის ქვედა ზღვარს, ხოლო A=0.31 ზედა ზღვარს. ეს საზღვრებია R_1 = 8 კმ და R_2 =11 კმ. R-ის ზრდასთან ერთად (18) ფორმულა სამართლიანი აღარაა. მაგალითად, R = 22 *კმ* და R=33 *კმ-ის* შემთხვევაში მინარევის გავრცელების მაქსიმალური სიმაღლე შეადგენს, შესაბამისად, 16 და 15კმ-ს.

ამრიგად, მინარევის გავრცელების მაქსიმალური სიმაღლე შეადგენს 16 კმ-ს. დაჭუჭყიანების (დაბინძურების) ძირითადი კერა ვრცელდება 8 კმ სიმაღლეზე.

წვიმის შემთხვევაში, ეს ნარევი მალევე ჩამოირეცხება დედამიწაზე. ეს შეფასებები შეესაბამება შეშის (ტყის) წვის პროცესს.

თუ განვიხილავთ მაქსიმალურად შესაძლებელ ენერგიის გამოყოფის სიმძლავრეს q_{max} = 0.24 მგვატი/მ^2 (ხანძარი ქალაქში) . მინარევის მიღწევის მაქსიმალური სიმაღლე "Z_{max}= 20კმ-ს, რაც ზოგად დასკვნებზე გავლენას ვერ ახდენს.

3.4. ფიზიკური ანალოგიის გამოყენება ეკოლოგიურ პროცესებში

დავუშვათ, არსებობს ორი დასახლებული პუნქტი. მაშინ მათ შორის ურთიერთქმედება (მიგრაცია, თვითგადაზიდვა, ინფორმაციის გაცვლა და ა. შ.) განისაზღვრება შემდეგნაირად (ჰაგატი 1968; 1979 წ.):

$$M_{ij} = \frac{P_i P_j}{{d_{ij}}^2}, \qquad (\mathbf{19})$$

M_{ij} – i და j ცენტრებს შორის ურთიერთქმედების ინტენსივობაა P_i და P_j ამ ცენტრების შესაბამისი ზომა, d_{ij}- მანძილი i და j ცენტრებს შორის. ეს კანონი ანალოგიურია მსოფლიო მიზიდულობის კანონის:

$$F = \gamma \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2}\,, \qquad (20)$$

მსოფლიო მიზიდულობის კანონისა, სადაც F არის m_1 და m_2 მასებს შორის ურთიერთქმედების – მიზიდულობის ძალა, γ – ურთიერთქმედების გრავიტაციული მუდმივა.

სტატისტიკური მონაცემების ხარჯზე ფორმულა უფრო დაზუსტდა. აღმოჩნდა, რომ ფორმულა განსხვავებულია ევროპისათვის და ამერიკისათვის. მაგალითად, ევროპისათვის, რომელიც ეკონომიკურად ნაკლებად განვითარებულია, დამახასიათებელია უფრო მკვეთრი ცვლილება და აღიწერება (19) ფორმულით, ხოლო ამერიკისათვის ფორმულა მოდიფიცირებულია:

$$M_{ij} = \frac{P_i P_j}{d_{ij}}\,. \qquad (21)$$

მეორე ამოცანა ეხება მიგრაციას. ამ პროცესის აღწერისათვის გამოიყენება სინათლის შთანთქმის მოვლენა ნივთიერებაში. მიგრაციის პროცესში მოსახლეობის შთანთქმა (დამკვიდრება) იმ ტერიტორიებზე, რომელსაც ის გადაკვეთს (გაივლის), გამოისახება ფორმულით (ჰაგატი 1968 წ):

$$M_x = kx^{-1} \cdot e^{-\alpha x}, \qquad (22)$$

სადაც M_x – მოსახლეობის მიგრაციის სიდიდეა, დამოკიდებული x კოორდინატზე, α-შთანთქმის კოეფიციენტია , k – მუდმივა.

ოპტიკის კანონები გამოიყენება, ასევე, გეოგრაფიული ამოცანების განხილვისას, რომელიც დაკავშირებულია ტრასის გაყვანასთან ორ დასახლებულ პუნქტს შორის. ამოცანა ტრივიალურია, თუ ტერიტორია ერთგვაროვანია. პუნქტების შეერ-

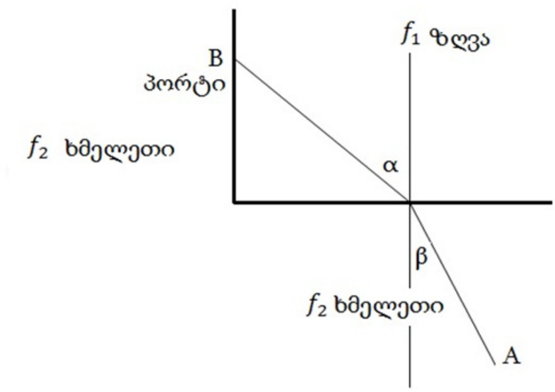
თება სწორი ხაზით ამოცანის ბუნებრივი გადაწყვეტა იქნება მაგრამ თუ ტერიტორია არაერთგვაროვანია, მაშინ ამოცანის ამოხსნა რთულდება. ამ ამოცანის ფიზიკური ანალოგი შეიძლება იყოს სინათლის გავლა არაერთგვაროვან გარემოში (სნელიუსის კანონი):

$$n_1 \cdot \sin\alpha = n_2 \cdot \sin\beta \qquad (23)$$

α და β არის კუთხე სხვადასხვა გარემოში სინათლის სხივსა და გამყოფ ზედაპირისადმი აღმართულ მართობს შორის, ხოლო n_1 და n_2 პირველი და მეორე გარემოს გარდატეხის მაჩვენებლებია, შესაბამისად. 1959 წელს ლეშმა გამოიყენა ოპტიკის კანონები სატრანსპორტო ტრასების ანალიზისათვის.

ამოცანის შინაარსია ის, რომ შევარჩიოთ პროდუქტის გადაზიდვის ტრასა ერთი პუნქტიდან მეორეში. ამასთან, ცნობილია, რომ გზის ერთი ნაწილი გადის ხმელეთზე, ხოლო მეორე – ზღვაზე. სატრანსპორტო გადასახადი ხმელეთზე და ზღვაზე, შესაბამისად, არის f_1 და f_2. ლეშმა მონახა პორტის მოხერხებული მდებარეობა. განტოლების ამონახსნია:

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{sin\beta}{sin\alpha}$$



ნახ. 4

3.5. ექსპლუატირებული პოპულაციის მოდელი

ამოცანა „თევზის ჭერის“ შესახებ. ვთქვათ, თევზის გამრავლების დინამიკა ღელეში ანტროპოგენული ჩარევის გარეშე აღიწერება ლოჯისტიკური განტოლებით:

$$\frac{dX}{dt} = (1 - X)X\,, \qquad (24)$$

სადაც X=X(t) პოპულაციის რაოდენობაა, ფარდობით ერთეულებში, ღელეში დროის მოცემულ t მომენტში. დავუშვათ, მიმდინარეობს თევზის ჭერა (მაგალითად, მეთევზეთა კოოპერატივი ამარაგებს ადგილობრივ თევზის მაღაზიას ცოცხალი თევზით).

1. დავუშვათ, რომ თევზჭერის სიჩქარე მუდმივია. $X(t)$ პოპულაციის საერთო რაოდენობაა t მომენტში. ამ რაოდენობიდან $\lambda X(t)$ ქვირითობს. ცნობილია, რომ პოპულაციის ყოველწლიური ზრდა ბუნებრივი განაყოფიერებით დამოკიდებულია თევზების ფონდზე, რომელიც გადანახულია ქვირითის შექმნისათვის და გამოითვლება რიკერის ფორმულით:

$$\alpha\lambda X e^{-\beta X}, \tag{25}$$

სადაც α და β მუდმივებია და $\alpha > 0, \beta > 0, \alpha e^{-\beta X}$ – თევზის დაბადების კოეფიციენტია, რომელიც დამოკიდებულია სიმკვრივეზე.

2. დავუშვათ, რომ ბუნებრივი სიკვდილიანობა პოპულაციის რიცხვის პროპორციულია. შესაბამისი კოეფიციენტი აღვნიშნოთ C-თი, $C > 0$.

პოპულაციის თავისუფალი განვითარება (ექსპლუატაციის გარეშე) აღიწერება განტოლებით:

$$\frac{dX}{dt} = \alpha\lambda X e^{-\beta X} - CX\,. \tag{26}$$

ვთქვათ, ქვირითის დამყრელ თევზთა რაოდენობა λX იყოფა υ და $1-\upsilon$ ნაწილებად ქვირითის ინკუბაციისათვის თევზის საწარმოში და ბუნებრივ პირობებში, შესაბამისად, $(0 \le \upsilon \le 1)$. პოპულაციის ზრდა ხელოვნური განაყოფიერებით აღიწერება წრფივი დამოკიდებულებით $\gamma\lambda X\upsilon$, სადაც $\gamma = const > 0$ დაბადების კოეფიციენტია ხელოვნურ პირობებში. მაშინ განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\frac{dX}{dt} = \alpha\lambda X(1-\upsilon)e^{-\beta X} + \gamma\lambda X\upsilon - \lambda X\upsilon - CX. \tag{27}$$

რეალურ პირობებში υ-პარამეტრიც დამოკიდებულია დროზე $\upsilon(t)$, რადგან პოპულაცია ექვემდებარება თევზჭერის (რეწვის) პროცესს. ამ პროცესის ინტენსივობა აღვნიშნოთ $U(t)$-თი, მაშინ:

$$\frac{dX}{dt} = \alpha\lambda X(1-\upsilon)e^{-\beta X} + \gamma\lambda X\upsilon - \lambda X\upsilon - CX - U, \tag{28}$$

$$0 \le \upsilon \le 1\,, \quad U(t) \ge 0.$$

3.6. პოპულაციების ურთიერთქმედება

დავწეროთ განტოლება, რომელიც აღწერს იმ ფაქტს, რომ პოპულაციის რიცხვის რაოდენობრივი ნამატი დროის ერთეულში დამოკიდებულია ყველა სახეობის რაოდენობაზე:

$$\frac{1}{N_i}\frac{dN_i}{dt} = f_i(N_1, \dots N_m)$$

$$dN_1 = \varepsilon_1 N_1 dt \tag{29}$$

$$dN_2 = \varepsilon_2 N_2 dt$$

ε_1 და ε_2 ნამატის დადებითი ნიშნის კოეფიციენტებია. კონკურენციის პირობებში ε_1 და ε_2 არ იქნებიან მუდმივები და დაიწყებენ შემცირებას სახეობების რაოდენობის ზრდასთან ერთად. ვოლტერამ ეს პროცესი ორი სახეობის შემთხვევაში აღწერა შემდეგი განტოლებებით:

$$dN_1 = \{\varepsilon_1 - \gamma_1 F(N_1, N_2)\} N_1 dt \qquad (30)$$

$$dN_2 = \{\varepsilon_2 - \gamma_2 F(N_1, N_2)\} N_2 dt$$

γ_1 და γ_2 ორივე სახეობისათვის საკვების საშუალო მოთხოვნილებას ითვალისწინებს. დავუშვათ, t_0 მომენტში $N_1 = N_1^0$, ხოლო $N_2 = N_2^0$.

გადავწეროთ ეს განტოლებები შემდეგი სახით:

$$\frac{dN_1}{N_1 dt} = \varepsilon_1 - \gamma_1 F(N_1, N_2)$$

$$\frac{dN_2}{N_2 dt} = \varepsilon_2 - \gamma_2 F(N_1, N_2) \qquad (31)$$

$$d\ln(N_1) = \frac{dN_1}{N_1}.$$

საბოლოოდ მივიღებთ:

$$\frac{d\ln(N_1)}{dt} = \varepsilon_1 - \gamma_1 F(N_1, N_2) \qquad (32)$$

$$\frac{d\ln(N_2)}{dt} = \varepsilon_2 - \gamma_2 F(N_1, N_2).$$

პირველი განტოლება გავამრავლოთ γ_2-ზე, მეორე – γ_1-ზე და გამოვაკლოთ ერთმანეთს

$$\gamma_2 \frac{d\ln(N_1)}{dt} - \gamma_1 \frac{d\ln(N_2)}{dt} = \varepsilon_1\gamma_2 - \varepsilon_2\gamma_1. \qquad (33)$$

გარდავქმნათ ეს განტოლება და მივიყვანოთ შემდეგ სახეზე:

$$d(\ln {N_1}^{\gamma_2}) - d(\ln {N_2}^{\gamma_1}) = (\varepsilon_1\gamma_2 - \varepsilon_2\gamma_1)dt. \qquad (34)$$

საბოლოოდ მივიღებთ:

$$d\ln\left(\frac{{N_1}^{\gamma_2}}{{N_2}^{\gamma_1}}\right) = (\varepsilon_1\gamma_2 - \varepsilon_2\gamma_1)dt \qquad (35)$$

და შედეგად ამონახსნს ექნება სახე:

$$\frac{{N_1}^{\gamma_2}}{{N_2}^{\gamma_1}} = \frac{(N_1^0)^{\gamma_2}}{(N_2^0)^{\gamma_1}} e^{(\varepsilon_1\gamma_2 - \varepsilon_2\gamma_1)t}. \qquad (36)$$

ამ განტოლების ანალიზი აჩვენებს, რომ საერთო საკვებისათვის კონკურენციის პირობებში ქრება ის სახეობა, რომელსაც ნაკლები აქვს $\frac{\varepsilon}{\gamma}$ სიდიდე.

ახლა განვიხილოთ ის შემთხვევა, როდესაც ორი სახეობის თანაარსებობისას, ერთი მტაცებელია, ხოლო მეორე – მსხვერპლი. განტოლებათა სისტემა, რომელიც აღწერს პოპულაციათა დინამიკას, მოიცემა ასეთი სახით:

$$\frac{dN_1}{dt} = \alpha_1 N_1 - \beta_1 N_1 N_2, \quad \frac{dN_2}{dt} = -\alpha_2 N_2 + \beta_2 N_1 N_2 \qquad (37)$$

სადაც N_1 მსხვერპლის რიცხვია, ხოლო N_2 – მტაცებლის. ამ განტოლებათა სისტემის (კოლმოგოროვის) აგებისას გაკეთებულია შემდეგი დაშვებები:

1. მტაცებლები არ ახდენენ ერთმანეთზე გავლენას.
2. მსხვერპლის ნაზრდი დროის მცირე ინტერვალში ტოლია, ნაზრდს მტაცებლის გარეშე გამოკლებული მტაცებლის მიერ განადგურებული მსხვერპლის რაოდენობა.
3. ეს განტოლებები არ შეიცავენ წევრს, რომელშიც გათვალისწინებულია სახეობის შიგნით კონკურენცია.
4. განტოლებათა სისტემა სამართლიანია მხოლოდ მაშინ, როცა პოპულაციის რიცხვი მცირედ გადახრილია წონასწორული მდგომარეობიდან. როცა ეს გადახრა მნიშვნელოვანია, ამ განტოლებებს აზრი ეკარგება, რადგან პოპულაციის ნაზრდი არაწრფივადაა დამოკიდებული საკვების რაოდენობაზე.

განტოლებათა სისტემა, რომელშიც გათვალისწინებულია პოპულაციის შიგნით კონკურენცია, 1937 წელს კოსტიცინმა შეადგინა.

$$\frac{dN_1}{dt} = \alpha_1 N_1 - \beta_1 N_1 N_2 - \gamma_1 {N_1}^2$$

$$\frac{dN_2}{dt} = \beta_2 N_1 N_2 - \alpha_2 N_2 - \gamma_2 {N_2}^2. \qquad (38)$$

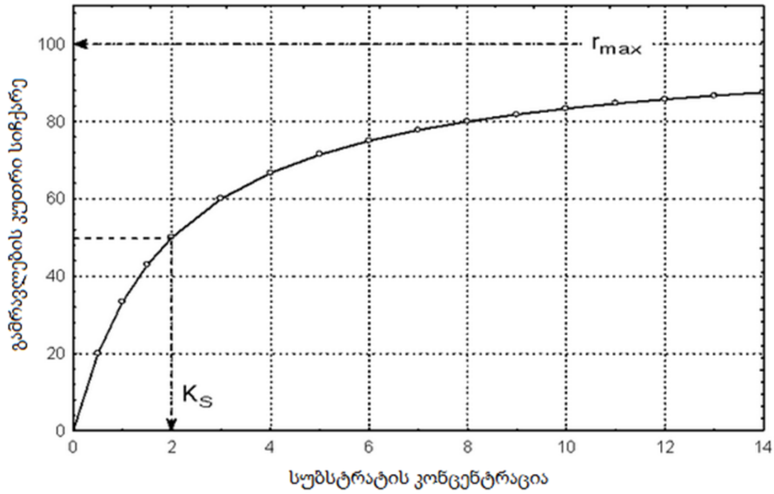
3.7. ლიმიტირების სუბსტრატის კონცენტრაციის გავლენა გამრავლების სიჩქარეზე. მონოს განტოლება

თეორია: სიცოცხლის უნარიანობისათვის აუცილებელი სასურსათო კომპონენტებიდან – სუბსტრატებიდან, რომელსაც პოპულაციის ორგანიზმი იღებს, ერთ-ერთი (რომელიც ძნელად მოსაპოვებელია და მოქმედებს) ლიმიტირებას უკეთებს ზრდის პროცესებს და გავლენას ახდენს გამრავლების სიჩქარეზე. ეს პრინციპი ცნობილია, როგორც ლიბეხის მინიმუმის პრინციპი. გამრავლების კუთრი სიჩქარის დამოკიდებულება ლიმიტირების სუბსტრატის რაოდენობაზე აღიწერება მონოს განტოლებით:

$$r(S) = \frac{r_{max} \cdot S}{K_S + S} \qquad (39)$$

მონოს განტოლებას ორი პარამეტრი აქვს: $r_{\max}$ – გამრავლების მაქსიმალურად შესაძლო სიჩქარე იმ პირობებში, როდესაც ლიმიტირების სუბსტრატის რაოდენობა შეუზღუდავია (განზომილება – [დრო]$^{-1}$) და K_S – ნაჯერობის პარამეტრი (განზომილება იგივეა, რაც სუბსტრატისათვის). თეორიის თანახმად, ნაჯერობის კოეფიციენტი რი-

ცხობრივად სუბსტრატის იმ კონცენტრაციის ტოლია, რომლის დროსაც გამრავლების სიჩქარე მაქსიმალურის ნახევარს მიაღწევს. მონოს მრუდი მოცემულია ნახ. 5-ზე.

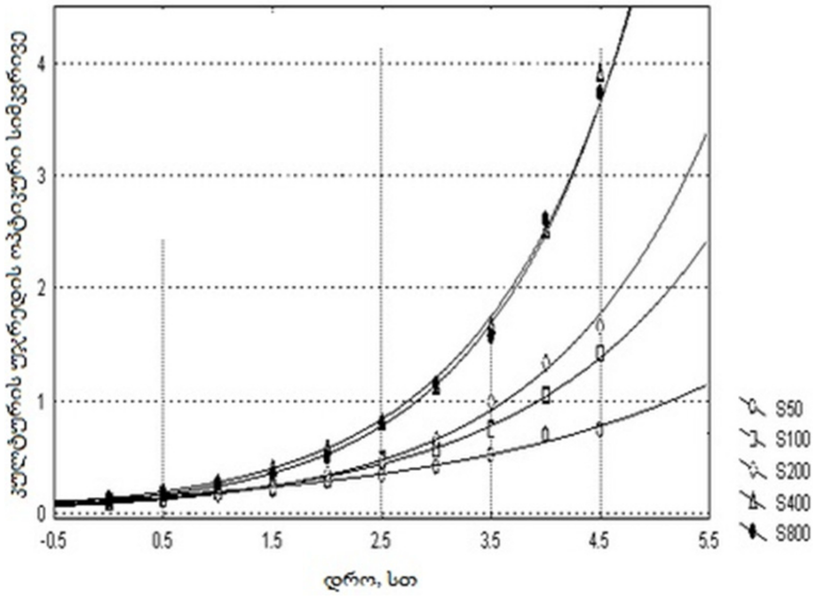


ნახ. 5. გამრავლების კუთრი სიჩქარის, ლიმიტირების სუბსტრატის კონცენტრაციაზე დამოკიდებულების მრუდი

ამოცანა: ბაქტერია *Escherichia coli-ის* – ნაწლავის ჩხირის – გამრავლების კინეტიკის გამოვლენის მიზნით, შეისწავლებოდა მოცემული ბაქტერიის უჯრედის ზრდისა და გამრავლების დამოკიდებულება ლიმიტირების სუბსტრატის – გლიცერინის კონცენტრაციაზე. უჯრედებს ზრდიდნენ ოპტიმალურ პირობებში და ყოველ ნახევარ საათში იზომებოდა კულტურის ოპტიკური სიმკვრივე (მაჩვენებელი, რომელიც გამოხატავს პოპულაციის რაოდენობას). ექსპერიმენტში მიღებული შედეგები მოყვანილია 1 ცხრილში და ნახაზზე 6.

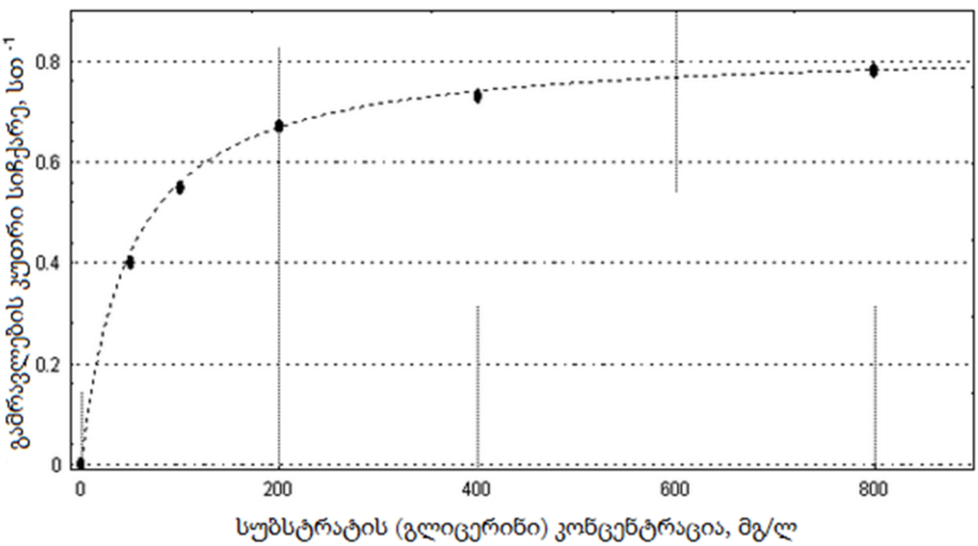
ცხრილი 1.

დრო სთ	კულტურის ოპტიკური სიმკვრივე სუბსტრატის სხვადასხვა კონცენტრაციისათვის (მგ/ლ), *Ex*					ln (Ex_t/Ex_0) სუბსტრატის სხვადასხვა კონცენტრაციისათვის (მგ/ლ)				
	50	100	200	400	800	50	100	200	400	800
0,00	0,12	0,12	0,09	0,14	0,10	-0,05	-0,01	0,01	-0,01	0,03
0,50	0,16	0,15	0,12	0,19	0,17	0,22	0,20	0,32	0,31	0,53
1,00	0,17	0,20	0,18	0,27	0,26	0,27	0,50	0,67	0,66	0,96
1,50	0,24	0,24	0,24	0,42	0,36	0,63	0,68	0,96	1,10	1,29
2,00	0,29	0,34	0,31	0,59	0,48	0,80	1,03	1,22	1,43	1,57
2,50	0,34	0,44	0,49	0,82	0,75	0,95	1,29	1,69	1,77	2,02
3,00	0,40	0,59	0,61	1,32	1,06	1,12	1,59	1,91	2,24	2,36
3,50	0,53	0,82	0,94	1,81	1,75	1,41	1,93	2,34	2,56	2,86
4,00	0,63	1,04	1,36	2,41	2,35	1,57	2,16	2,72	2,84	3,16
4,50	0,78	1,34	1,79	3,62	3,96	1,79	2,42	2,99	3,25	3,68



ნახ. 6. E.coli* *უჯრედის კულტურის ოპტიკური სიმკვრივის ცვლილება ლიმიტირების სუბსტრატის (გლიცერინი) სხვადასხვა კონცენტრაციისათვის. აქ S50 შეესაბამებასუბსტრატის კონცენტრაციას 50 მგ/ლ, S100 – სუბსტრატის კონცენტრაციას 100 მგ/ლ და ა.შ.

ექსპერიმენტული მონაცემების საფუძველზე განვსაზღვროთ ნაწლავური ჩხირის უჯრედის გამრავლების კინეტიკური პარამეტრები $\boldsymbol{r}_{\max}$ და $\boldsymbol{K}_{S}$.



ნახ. 7. კუთრი სიჩქარის ლიმიტირების სუბსტრატის (გლიცერინის) კონცენტრაციაზე დამოკიდებულების მრუდი

3.8. ლიმიტირებული პოპულაცია ზრდის ლოჯისტიკური კანონით

დავუშვათ, დაბადების (შობადობის) კოეფიციენტია b, ხოლო d – სიკვდილიანობის კოეფიციენტი, მაშინ გამრავლების კოეფიციენტი გამოისახება, როგორც:

$$r = \text{b-d} \tag{40}$$

დავწეროთ მალთუსის (პოპულაციის შეუზღუდავი ზრდის) განტოლება და მასში გავითვალისწინოთ ეს კოეფიციენტები:

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = r = \mathrm{b} - \mathrm{d} \tag{41}$$

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = \mathrm{b} - \mathrm{d} \tag{42}$$

ეს კოეფიციენტები, ზოგადად, არ არიან დამოკიდებული სივრცულ კოორდინატებზე. განვიხილოთ კონკრეტულად საკითხი, როდესაც b და d შეიძლება იყვნენ N-ის ფუნქციები. მრავალი სახეობისათვის შობადობის კოეფიციენტი b განისაზღვრება შობადობის ფიზიოლოგიური ზღვრით და არ არის დამოკიდებული *N*-ზე. ასე რომ, B(*N*)=n=const, სადაც n ბუნებრივი შობადობაა. რაც შეეხება სიკვდილიანობის d ფუნქციის *N*-ზე დამოკიდებულებას, პრაქტიკულად, ყველა პოპულაციისათვის D(*N*) მონოტონურად ზრდადი ფუნქციაა, ამასთან, D(0)=m>0 ბუნებრივი სიკვდილიანობაა, ხოლო სიკვდილიანობის ზრდა, *N*-ის ზრდასთან ერთად, აიხსნება კონკურენციის ზრდით რესურსებისათვის (საკვები, სივრცე და სხვა).

დაწვრილებით განვიხილოთ ეს შემთხვევა. *D*(*N*)-ის *N*-ზე დამოკიდებულების ყველაზე მარტივი სახეა წრფივი: $D(N\ ) = \mathrm{m} + \gamma\mathrm{N}$, მაშინ მივიღებთ:

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = (m - n) - \gamma\mathrm{N} \tag{43}$$

$\varepsilon = m - n$, იგივე მალთუსის კოეფიციენტია

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = \varepsilon - \gamma\mathrm{N}, \tag{44}$$

სადაც $= m - n$ არის პოპულაციის ზრდის ფარდობითი (კუთრი) სიჩქარე ლიმიტირების (შეზღუდული ზრდის) არარსებობის პირობებში, $\gamma -$ ლიმიტირების კოეფიციენტია, რომელიც შეესაბამება პოპულაციის მოთხოვნილებას საკვებზე, სივრცეზე და სხვა რესურსებზე. γN მჭიდროობის (გადავსების) ფაქტორია. ეს განტოლება ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$\frac{dN}{dt} = \varepsilon N\left(1 - \frac{\gamma}{\varepsilon}\mathrm{N}\right). \tag{45}$$

განტოლებას ლოჯისტიკური განტოლება ეწოდება. თუ შეფარდებას $\frac{\varepsilon}{\gamma}$ აღვნიშნავთ K-თი ($\frac{\varepsilon}{\gamma} = K$), მაშინ მივიღებთ ფერხიულსტის განტოლებას :

$$\frac{dN}{dt} = \varepsilon N\left(1 - \frac{\mathrm{N}}{K}\right). \tag{46}$$

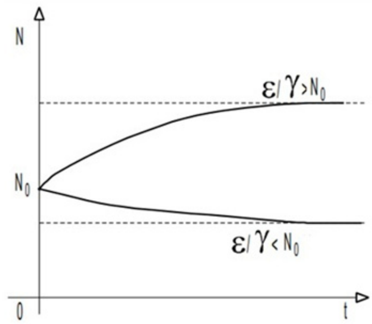
K-ს პოპულაციის ტევადობა ეწოდება. ამ განტოლების ამონახსნია:

$$N(t) = \frac{\varepsilon}{\gamma}\frac{N_0}{N_0 + (\frac{\varepsilon}{\gamma} - N_0)e^{-\varepsilon t}} \,. \tag{47}$$

ამ ამონახსნის თვისებაა:

$$\lim_{t\to\infty} N(t) = \frac{\varepsilon}{\gamma} = K \,. \tag{48}$$

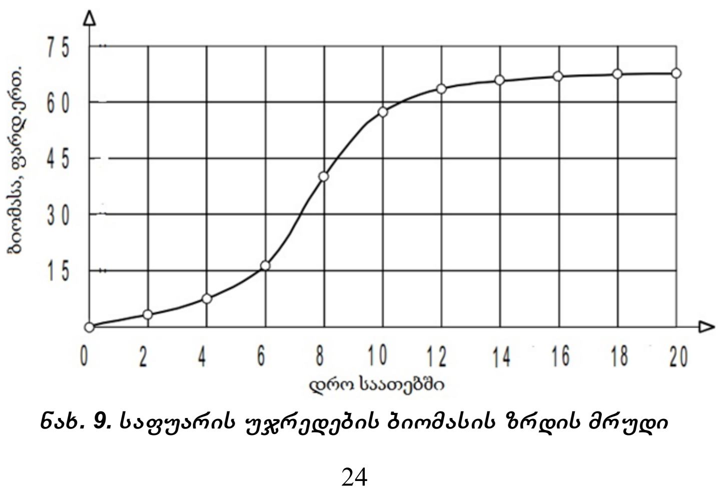
ანუ პოპულაციის რიცხოვნობა (სიმკვრივე) მიისწრაფვის მუდმივი მნიშვნელობისაკენ, რომელიც ზრდის კუთრი სიჩქარის პროპორციულია არალიმიტირებულ გარემოში და უკუპროპორციულია ლიმიტირების γ კოეფიციენტის. ამ შემთხვევაში შესაძლებელია ორი შემთხვევა: $\frac{\varepsilon}{\gamma} > N_0$ და $\frac{\varepsilon}{\gamma} < N_0$. მათ შორის განსხვავება ნაჩვენებია ნახ. 8-ზე.



ნახ. 8. ლოჯისტიკური პოპულაციის ზრდის მრუდი

$\frac{\varepsilon}{\gamma}$ შეფარდება აღწერს პოპულაციის მგრძნობიარობას საკვების (რესურსების) ნაკლებობაზე. (47) განტოლებიდან ჩანს, რომ მცირე N-ისთვის და სასრული t-სთვის $N(t) = N_0 e^{\varepsilon t}$.

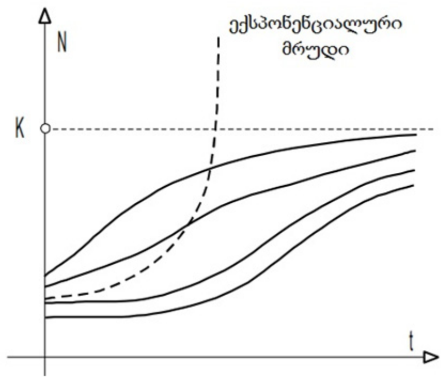
განვიხილოთ კონკრეტული მაგალითი – საფუარის უჯრედების ბიომასის ზრდის კანონზომიერება რესურსების ლიმიტირების პირობებში (ნახ.9).



ნახ. 9. საფუარის უჯრედების ბიომასის ზრდის მრუდი

ეს მრუდი კარგად აღწერს (46) დამოკიდებულებას. აშშ-ის მოსახლეობის ზრდის პროცესისათვის რ. პერლმა და რიდმა მე-20 საუკუნის 20-იან წლებში ჩამოაყალიბეს ლოჯისტიკური განტოლება. როცა ნაშრომი გამოქვეყნდა, აღმოჩნდა, რომ ჯერ კიდევ 1838 წ. ეს განტოლება დაწერა ბელგიელმა მათემატიკოსმა პიერ ფრანსუა ფერხიულსტმა (1804-1849) მოსახლეობის რაოდენობის ზრდის დინამიკისათვის. ეს მარტივი თვალსაჩინო მოდელი საკმაოდ კარგად აღწერს ზრდის დინამიკას ბევრი ბუნებრივი პოპულაციისათვის. დღეისთვის დედამიწის მოსახლეობა აღემატება 6 მილიარდს. სხვადასხვა შეფასებით, სტაციონარული სიდიდეა 16-20 მილიარდი. ლოჯისტიკური მოდელი ეკოლოგიაში, ჩვეულებრივ, დამკვიდრებულია.

N-ის მცირე მნიშვნელობისათვის, სანამ პოპულაციამ არ ამოწურა თავისი საარსებო რესურსები, ლოჯისტიკური განტოლების ამონახსნს ზრდის ექსპონენციალური ხასიათი აქვს. t-დროის ზრდასთან ერთად იზრდება N და მცირდება პოპულაციის საარსებო რესურსები, ზრდის ტემპი ნელდება და N უახლოვდება მუდმივ $\frac{\varepsilon}{\gamma} = K$ მნიშვნელობას (ნახ. 10).



ნახ. 10. ლოჯისტიკური მოდელი გარემოს ტევადობისათვის $K = \frac{\varepsilon}{\gamma}$

3.9. განზოგადებული ლოჯისტიკური განტოლება

თუ განვაზოგადებთ (45) განტოლებით აღწერილ მოდელს, შეგვიძლია ჩავწეროთ:

$$\frac{dN}{dt} = F(N), \tag{49}$$

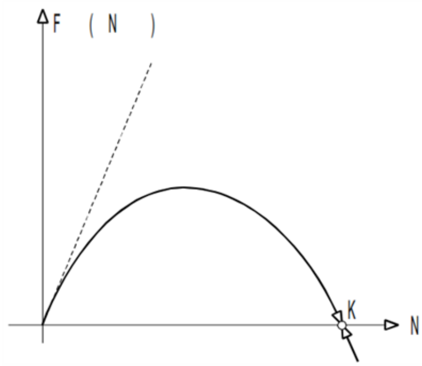
სადაც $F(N)$ აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

ა) $F(0) = F(K) = 0, 0 < K < \infty$

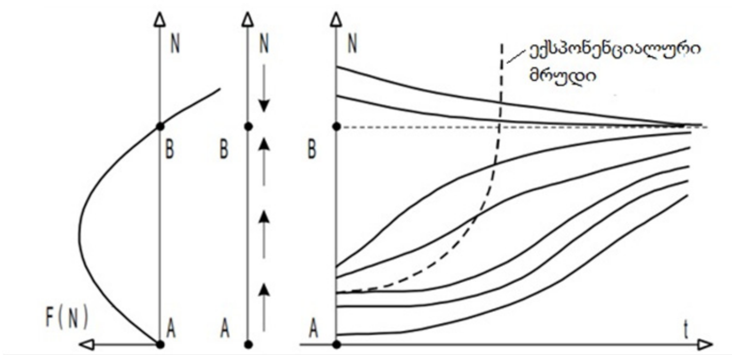
ბ) $\frac{dF}{dt} = \varepsilon > 0$

გ) $\left(\frac{dF}{dt}\right)_0 > \left(\frac{dF}{dt}\right)_N$, როცა $N > 0$ (50)

მე-11 ნახაზზე გამოსახულია განზოგადებული ლოჯისტიკური პოპულაციის ფაზური პორტრეტი.



ნახ. 11. განზოგადებული ლოჯისტიკური პოპულაციის ფაზური სურათი



ნახ. 12. განზოგადებული ლოჯისტიკური განტოლების შედეგების გრაფიკული წარმოსახვა

მოცემული ნახაზის შუაში მოცემულია განტოლების ფაზური სურათი, რომელიც გამოსახავს ეკოსისტემის ევოლუციის სიჩქარის მიმართულებას. ამ ნახაზის მიხედვით, საწყის მდგომარეობაში სისტემა იმყოფება A მდგომარეობაში, ანუ $F(A) = F(B) = 0$. A და B წერტილებში პოპულაციის ზრდის ფარდობითი სიჩქარე 0-ის ტოლია. ეს სტაციონარული მდგომარეობაა. A-სა და B-ს შორის სიჩქარე დადებითია (პოპულაცია იზრდება), ხოლო $F(N) > F(B)$ არეში – უარყოფითი (პოპულაცია კლებულობს). მარჯვენა სურათზე ნაჩვენებია პოპულაციის რიცხოვნობის დამოკიდებულება დროზე სხვადასხვა არეში სხვადასხვა პირობებში (სხვადასხვა საწყისი პირობისათვის). მოდელი გვიჩვენებს, რომ გარკვეული დროის შემდეგ მყარდება მდგრადი რეჟიმი B, პოპულაციის დიდი რიცხოვნობა მცირდება, ხოლო მცირე – იზრდება. განზოგადებული ლოჯისტიკური მოდელი კარგად აღწერს მრავალ მოვლენაში ნაჯერობას.

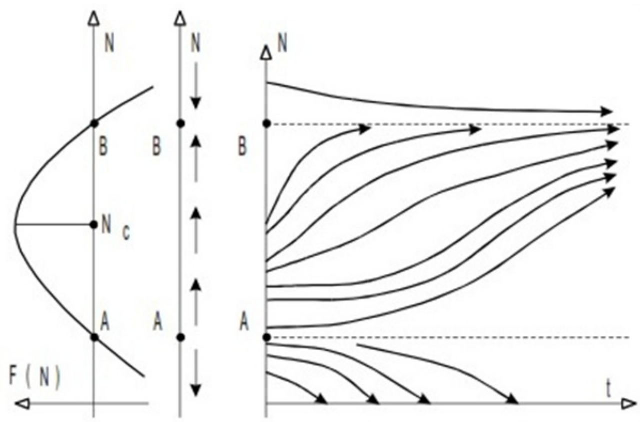
A მახლობლობაში, როცა პოპულაციის რიცხოვნობა მცირეა, ის ახლოსაა მალთუსის მოდელთან, მაგრამ N-ის საკმაოდ დიდი მნიშვნელობისათვის შეიმჩნევა მკვეთრი განსხვავება მალთუსის (პუნქტირით აღნიშნული) მრუდისაგან. რიცხოვნობის ზრდის კანონზომიერება ისეთია, რომ, უსასრულობის ნაცვლად, ის მიისწრაფვის სტაციონალური B მნიშვნელობისაკენ.

განვიხილოთ მაგალითი:

ვთქვათ N არის თევზების რაოდენობა ტბაში ან ოკეანეში. განვსაზღვროთ, როგორ აისახება თევზების რიცხოვნობაზე თევზჭერის პროცესი C-ინტენსივობით.

$$\frac{dN}{dt} = F(N) - C. \tag{51}$$

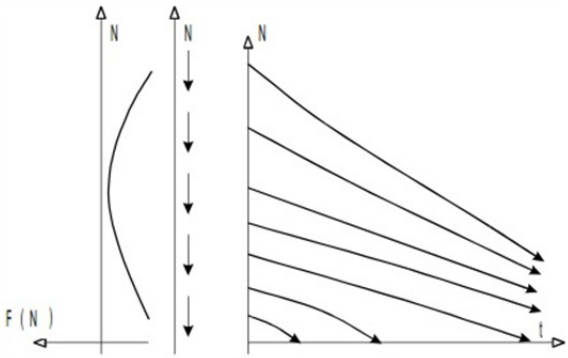
თევზების რიცხოვნობის ცვლილება $C = 0$ შემთხვევაში ასახულია ნახ.13.-ზე. დავუშვათ, რომ $F(N)$ ფუნქციის მაქსიმუმი ტოლია $F(N_c)$-ის. თუ $C < F(N_c)$ და $C = 0$, მაშინ ცვლილება, თავისუფალ პოპულაციასთან შედარებით, ასე აისახება: სისტემას აქვს ორი წონასწორული მდგომარეობა – A და B (ნახ.13), B მდგომარეობა მდგრადია.



სურ. 13. თევზების რიცხოვნობის ევოლუცია იმ შემთხვევაში, როცა დაწესებული ლიმიტი მცირეა კრიტიკულთან შედარებით.

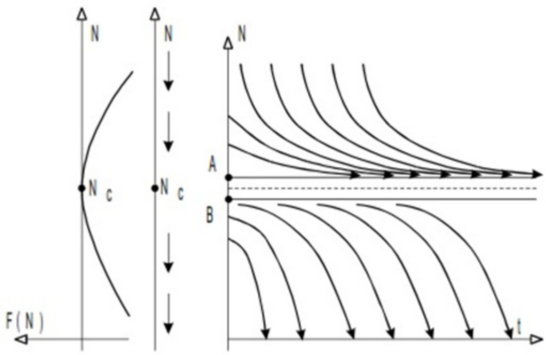
ამ შემთხვევაში პოპულაციის რიცხოვნობა შედარებით ნაკლებია, ვიდრე $C = 0$ შემთხვევაში, მაგრამ ის აღდგება, როცა N-ის გადახრა მცირეა წონასწორული B-სგან. A მდგომარეობა არამდგრადია. ამ შემთხვევაში, თუ პოპულაცია რაღაც პირობების გამო (ბრაკონიერობა და სხვა) დაეცემა A დონის ქვემოთ, ის ნელა დაიწყებს შემცირებას და მთლიანად განადგურდება. როდესაც ჭერის ინტენსივობის ლიმიტი მეტია, ვიდრე კრიტიკული $C = F(N_c)$ (ნახ.14), პოპულაცია იღუპება სასრული დროის შემდეგ, მიუხედავად მისი სიდიდისა. ამის მაგალითია მამონტების, ბიზონების, ბევრი სახეობის ვეშაპის განვითარების ტენდენცია.

აქედან ჩანს, რომ C პარამეტრის შერჩევა ძალზე მნიშვნელოვანია N პოპულაციის ექსპლოატაციის დაგეგმვისას.



ნახ. 14. თევზების რიცხოვნობის ევოლუცია, როდესაც თევზჭერის ინტენსივობა აღემატება შეზღუდულ-კრიტიკულ ლიმიტს.

ნახ.15 ჩანს, რომ ოპტიმალური შემთხვევისათვის $C = F(N_c)$ მდგომარეობა არამდგრადია. როგორიც არ უნდა იყოს რიცხოვნობის საწყისი მნიშვნელობა, გარკვეული დროის შემდეგ ის გადის სტაციონარულ რეჟიმზე $A=B=N_c$, რომელიც არამდგრადია.



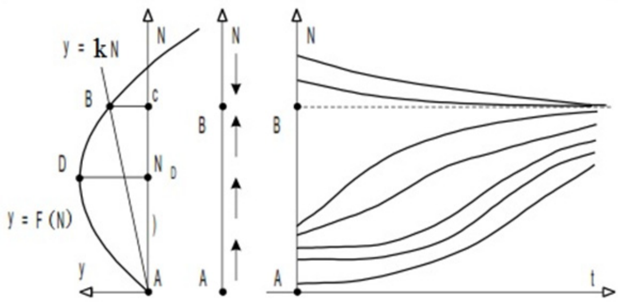
ნახ. 15. თევზების რიცხოვნობის ევოლუცია, როდესაც თევზჭერის ინტენსივობა ტოლია შეზღუდული-კრიტიკული ლიმიტის.

N-ის მცირე შემთხვევითი შემცირებისას პოპულაცია მიდის სრულ განადგურებამდე. ესაა შედეგი ოპტიმიზაციის (კრიტიკული მდგომარეობის მიღწევის) არამდგრადობის. თუმცა, მოდელის შიგნით, შეიძლება შევიმუშავოთ რბილი რეჟიმი, რომელიც საშუალებას გვაძლევს, გადავლახოთ ეს პრობლემა (არამდგრადობა). აღმოჩნდა, რომ მდგრადობა აღდგება, თუ ხისტ დაგეგმარებას ($C= N_c$) შევცვლით უკუკავშირით. C უნდა იყოს არა მუდმივი (C=const), არამედ დამოკიდებული სისტემის მიღწეულ მდგომარეობაზე.

$$C=kN, \qquad (52)$$

სადაც k დიფერენციალური ლიმიტია („კვოტა“) და ის უნდა შეირჩეს. ამ შემთხვევაში მოდელი მიიღებს სახეს:

$$\frac{dN}{dt} = F(N) - kN \qquad (53)$$



ნახ. 16. მდგრადი სისტემა უკუკავშირით

მოდელის ფარგლებში მიიღება მრუდი (სურ.9), რომელიც აღწერს სისტემის მდგრადობას უკუკავშირით. როცა $k < F'(0)$, გარკვეული დროის შემდეგ დამყარდება სტაციონარული მდგომარეობა B. საშუალო მრავალწლიანი ნამატი (მოგება) C=kN ამ შემთხვევაში ოპტიმალურია, როცა მრუდი (წრფე) *Y=kN* გადის $Y = F(N)$ მრუდის *D* წვეროში. ასეთ შემთხვევაში საშუალო მოგება $C=kN_D=F(N_D)$ მიაღწევს მაქსიმალურად ოპტიმალურ მნიშვნელობას. სისტემა უკუკავშირით, ხისტისაგან განსხვავებით, მდგრადია *k* კოეფიციენტის ოპტიმალური მნიშვნელობისათვის (მცირე გადახრას შემცირებისაკენ სისტემა თვითონ აღადგენს). უფრო მეტიც, *k* კოეფიციენტის გადახრას ოპტიმალურისაგან $\frac{F(N_D)}{N_D}$ მივყავართ არა სისტემის თვითგანადგურებამდე, არამედ გარკვეულწილად მცირდება შემოსავალი (ნამატი).

ამგვარად, ცხადია, რომ დაგეგმარების პირობებში საჭიროა უკუკავშირის განხორციელება.

§4. დაგვიანების ფაქტორის გათვალისწინება ეკოსისტემის განვითარების დინამიკაში

ერთ-ერთი პირველი მათემატიკური მოდელი ბიოლოგიაში, რომელიც ითვალისწინებდა დროით დაყოვნებას (დაგვიანებას), წარმოადგინა ჯ. ეველიპმა (1903-1991). მან პირველმა მიაქცია ყურადღება დაგვიანების ფაქტორს ეკოსისტემის დინამიკაში და მოგვცა განტოლება:

$$\frac{dN}{dt} = \varepsilon N \left(1 - \frac{\mathrm{N}_{t-T}}{K}\right)\ T > 0\ . \tag{54}$$

ეს მოდელი შემდეგ მოსაზრებებს ეყრდნობა. რომელიმე სახეობის სიმკვრივის (რიცხოვნობის) ზრდასთან ერთად, მცირდება საარსებო რესურსები, რომელსაც ის მოიპოვებს.

ეს სიტუაცია აღიწერება ლოჯისტიკური განტოლებით (53). რეალურ ეკოსისტემაში რესურსებს თვითაღდგენის თვისება გააჩნიათ. ამიტომ რესურსების რეალური დონე, რომელიც მოიპოვება დროის მოცემულ მომენტში, დამოკიდებულია სიმკვრივეზე და რესურსების სახეობაზე დროის წინა $t - T$ მომენტში, სადაც T რესურსის სახეობის განვითარების დროა. ამრიგად, ჩვეულებრივი (დაგვიანების გა-

რეშე) ლოჯისტიკური განტოლება (8) უნდა შეიცვალოს განტოლებით (54). დაგვიანების გათვალისწინებით, პოპულაციის რიცხოვნობა რხევებს განიცდის. როცა T მეტია $1/_{\varepsilon}$-სისტემის მახასიათებელ დროზე, მაშინ (53) განტოლებას მივყავართ განშლად რხევებამდე, თუმცა ლოჯისტიკური განტოლებისათვის $T = 0$ შემთხვევაში გვაქვს მდგრადი არარხევითი წონასწორობა.

4.1. უკუკავშირი დაგვიანებით

ინჟინრებისთვის კარგადაა ცნობილი, რომ თუ სისტემა რეგულირდება უკუკავშირით, რომელშიც ხდება მნიშვნელოვანი შეფერხება, მაშინ არსებობს საკმაო ალბათობა იმისა, რომ აღიძვრეს დიდი ამპლიტუდის რხევები. რხევებსა და რეგულაციებს შორის ასეთივე კავშირზე დაგვიანებით დაკვირვება ხდება ყოველდღიურ ცხოვრებაში. მაგალითად, ეკონომიკური ბუმი და ჩავარდნები, სხვა მიზეზებთან ერთად, წარმოიშობიან შეფერხებისას იმ მომენტებს შორის, როცა მოთხოვნილება რომელიმე საქონელზე აჭარბებს წინადადებას და იმ მომენტს შორის, როცა ამ საქონლის მწარმოებელს შეუძლია მთლიანად უზრუნველყოს მოთხოვნილება.

შეფერხების ზეგავლენა სისტემის დინამიკაზე შეიძლება უფრო ზუსტად შემდეგნაირად ჩამოყალიბდეს: საზოგადოდ, თუ შეფერხების ხანგრძლივობა უკუკავშირის „მარყუჟში“ (ციკლში) აღემატება სისტემის მახასიათებელ დროს, მაშინ აღიძვრებიან დიდი ამპლიტუდის რხევები. თუ რომელიმე სახეობის სიმრავლის ზრდა რეგულაციის არარსებობის პირობებში ემორჩილება მალთუსის განტოლებას

$$\frac{dx}{dt} = rx\,, \tag{55}$$

მაშინ მახასიათებელი დრო ტოლია $\frac{1}{r}$ -ის.

ეკოსისტემებში რეგულაციის დაგვიანება (შეფერხება) გამოწვეულია ერთ-ერთი მიზეზით შემდეგი სამიდან:

განვითარების დრო. რომელიმე ცვლილებამ გარემოში, მაგალითად, რესურსების გაზრდამ, შეიძლება გამოიწვიოს ზრდასრული ინდივიდის პროდუქტიულობის უეცარი ზრდა, მაგრამ ზრდასრული ინდივიდების რაოდენობის შესაბამისი ცვლილება მოხდება გარკვეული T დროის შემდეგ, რომელიც საჭიროა ზრდასრული ინდივიდის კვერცხუჯრედიდან ჩამოყალიბებისათვის. თუ x ზრდასრული ინდივიდების რაოდენობაა, მაშინ განტოლება

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \tag{56}$$

უნდა შეიცვალოს განტოლებით

$$\frac{dx}{dt} = f(x_{t-T})\,, \tag{57}$$

სადაც x_{t-T} გამრავლების შესაძლებლობის მქონე (მონაწილე) ინდივიდების რაოდენობაა დროის $(t-T)$ მომენტში.

4.2. გამრავლების სეზონის პერიოდულობა

ბევრი სახეობა, მათ შორის, ის სახეობებიც კი, რომელთაც შეუძლიათ გამრავლება უწყვეტად რამდენიმე წლის განმავლობაში, მხოლოდ წელიწადის გარკვეულ პერიოდში მრავლდება. ეს სიტუაცია, ჩვეულებრივ, რეალიზდება ძუძუმწოვართათვის და ფრინველებისათვის, ასევე, მრავალწლიანი მცენარეებისთვის. გამრავლების სეზონის არსებობა სახეობის განვითარების დინამიკაში იწვევს გარკვეულ შეყოვნებას – დაგვიანებას დროში. თუ მოცემული სახეობის სიცოცხლის ციკლი რამდენიმე წელს მოიცავს და ყოველწლიურად გამრავლებისას ისინი წარმოშობენ (დაბადებენ) ფარდობითად მცირე რაოდენობის ინდივიდს, მაშინ დაგვიანება ერთი წლით, განპირობებული გამრავლების სეზონის დისკრეტულობით, არ შეიძლება ჩაითვალოს ხანგრძლივად ამ სახეობის დინამიკის შესაბამის მახასიათებელ დროსთან შედარებით და ამდენად, დაგვიანებით გამოწვეული ნებისმიერი რხევა მილევადი იქნება. თუ ზრდასრული ინდივიდები, რომლებიც მოცემულ წელიწადში მრავლდებიან, იშვიათად ან ვერასოდეს ვერ აღწევენ (იღუპებიან) გამრავლების შემდგომ პერიოდს (იმისათვის, რომ გამრავლდნენ შემდეგ წელში), მაშინ ეს სიტუაცია მნიშვნელოვან გავლენას ახდენს მათი რაოდენობის დინამიკაზე, ისევე, როგორც, მაგალითად, როგორც ეს ახასიათებს ერთწლიან მცენარეებს, მრავალ მწერს, ზოგიერთ ფრინველს და სხვა. ამრიგად, განტოლებებში უნდა გავითვალისწინოთ, რომ $x_{n+1} = \Phi(x_n)$, სადაც x_n–პოპულაციის რაოდენობაა n-წელს. ძალიან ხშირად, მიუხედავად იმისა რომ დიფერენციალური განტოლებისათვის მდგრადი წონასწორული მდგომარეობა არსებობს, შესაბამის განტოლებებს განშლად რხევებამდე მივყავართ.

4.3. დაგვიანების გამომწვევი ფაქტორები, რომლებიც რაოდენობას ზღუდავენ

იმ შემთხვევაშიც კი, როცა მოცემული სახეობა მყისიერად რეაგირებს ყველა უშუალო ზემოქმედებაზე – გარემო პირობებზე, მისი რაოდენობა მაინც განიცდის რხევებს, როცა არსებობს რაოდენობის შემზღუდავ ფაქტორებთან დაკავშირებული დაგვიანება, როდესაც რაოდენობას ზღუდავს თვით სახეობა. ამ სიტუაციაზე, ჩვეულებრივ, დაკვირვება წარმოებს იმ შემთხვევაში, როცა ცხოველის ან მცენარის სახეობას ახასიათებს ინდივიდუალური განვითარების ხანგრძლივ დროსთან ან გამრავლების სეზონების დისკრეტულობასთან დაკავშირებული რეაქციის დაგვიანება. ამასთან, არავითარი მნიშვნელობა არ აქვს, რა როლს ასრულებს რაოდენობის შემზღუდავი სახეობა: ის შეიძლება იყოს როგორც მტაცებელი, ასევე, მსხვერპლი (კვების წყარო).

ეკოლოგებს შორის დაგვიანების როლზე პირველად ყურადღება გაამახვილა ხატჩინსონმა (Hutchinson G.E., “Circular causal systems in ecology”, Ann.N.Y. Acad.Sci.,50,221-246 (1948)). მან განიხილა განტოლება

$$\frac{dx}{dt} = x(a - bx_{t-T}) \tag{58}$$

4.4. პოპულაციის დინამიკა პერიოდულ გარემოში

მალთუსის განტოლება (7) იმ პირობებში მიიღება, როცა ფარდობითი (კუთრი) სიჩქარე დამოკიდებულია მხოლოდ ε სიდიდეზე, რომელიც პოპულაციის ბიოლოგიური მახასიათებელია და დამოკიდებული არაა საარსებო გარემოს ტიპზე, ანუ:

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = \varepsilon = const \tag{59}$$

ზოგად შემთხვევაში ზრდის ფარდობითი სიჩქარე, რომელიც ახასიათებს პოპულაციის შემთვისებლობას საარსებო გარემოსთან, დამოკიდებული იქნება არა მარტო პოპულაციის ბიოლოგიურ თავისებურებებზე, არამედ საარსებო გარემოს ფაქტორებზე. ეკოლოგიაში მიღებულია, რომ ეს ფაქტორები დაიყოს ფაქტორებად, რომელთა ზემოქმედების ინტენსივობა დამოკიდებულია პოპულაციის რიცხოვნობაზე და ფაქტორებად, რომლებიც არაა დამოკიდებული რიცხოვნობაზე. ფაქტორებს, რომლებიც არაა დამოკიდებული რიცხოვნობაზე, მიეკუთვნება მეტეოროლოგიური ფაქტორები – ტემპერატურა, გარემოს ქიმიური შემადგენლობა, ტენიანობა და სხვა. ფაქტორებს, რომლებიც დამოკიდებული არიან პოპულაციის რიცხოვნობაზე, მიეკუთვნება: პოპულაციის უზრუნველყოფა საკვებით, სინათლით და სხვა. შედეგად, პოპულაციური ზრდის დინამიკა შეიძლება გამოისახოს განტოლებით:

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = W(N,t) \tag{60}$$

$W(N,t)$-ს შემთვისებლობის სიდიდე ეწოდება. დავუშვათ, პოპულაციის რიცხოვნობა რაღაც გარემოში გაზრდილია c-ჯერ, როგორ შეიცვლება $W(N,t)$? რა თქმა უნდა, ეს დამოკიდებული იქნება მრავალ გარემოებაზე: პოპულაციის უზრუნველყოფა ტერიტორიით, საკვებით და სხვა. როცა საარსებო გარემოს ყველა კომპონენტი სახეზეა საკმარისი რაოდენობით, მაშინ რიცხოვნობის გაზრდა არ შეცვლის შემთვისებლობის ფუნქციას:

$$W(cN,t) = W(N,t). \tag{61}$$

ასეთ დამოკიდებულებას ნეიტრალური ეწოდება, ხოლო პოპულაციას – **ნეიტრალური** პოპულაცია.

როცა გარემოში არსებობს საკმარისი რაოდენობის დეფიციტი ერთი კომპონენტისაც კი, რომელიც აუცილებელია სიცოცხლისუნარიანობისათვის, მაშინ მისი სიმცირე გამოიწვევს რიცხოვნობის ზრდის ლიმიტირებას. მაშინ :

$$W(cN,t) < W(N,t)\ , \tag{62}$$

სადაც $c > 1$. ასეთ დამოკიდებულებას ლიმიტირებული ეწოდება, ხოლო პოპულაციას – **ლიმიტირებული** პოპულაცია.

განხილული სიტუაციის გარდა, შესაძლებელია სხვაც, როცა დროის გარკვეულ ინტერვალში პოპულაციის ზრდა ზრდის პოპულაციის შემთვისებლობას. ასეთი მოვლენები რეალიზდება იმ პირობებში, როცა ქმედებაში მოდიან ე. წ. „თანამშრომ-

ლობის“ ფაქტორები. ეს დამტკიცებულია ექსპერიმენტულად. ამ შემთხვევაში, როცა c>1:

$$W(cN,t) > W(N,t) \tag{63}$$

ასეთ გარემოს **მასტიმულირებელი** ეწოდება.

დავუშვათ, T არალიმიტირებული ნეიტრალური გარემოს რხევის პერიოდია. ამ შემთხვევაში

$$W(N,t) = \varepsilon(t)\ , \tag{64}$$

სადაც $\varepsilon(t+T) = \varepsilon(t)$.

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = \varepsilon(t)\,. \tag{65}$$

განტოლების ამოხსნისთვის უნდა შემოვიღოთ ε-ის საშუალო მნიშვნელობის ცნება

$$\overline{\varepsilon(t)} = \int_t^{t+T} \varepsilon(\tau)\,d\tau \tag{66}$$

და დამხმარე ფუნქციის $\varphi(t)$-s ცნება

$$\varphi(t) = e^{\int_0^t[\varepsilon(\tau)-\bar{\varepsilon}]d\tau} > 0 \tag{67}$$

$\varphi(t)$ ფუნქციაც პერიოდული ფუნქციაა $\varphi(t+T) = \varphi(t)$. განტოლების ამონახსნს აქვს სახე:

$$N = N_0 e^{\bar{\varepsilon}\,t}\varphi(t) \tag{68}$$

როცა $\bar{\varepsilon} > 0$, მაშინ პოპულაციის რიცხოვნობა იზრდება უსასრულოდ და ირხევა ექსპონენტის მახლობლობაში; თუ $\bar{\varepsilon} = 0$, რიცხოვნობა იცვლება პერიოდულად გარკვეული მუდმივი დონის მახლობლობაში; როცა $\bar{\varepsilon} < 0$, პოპულაციის რიცხოვნობა მიისწრაფვის 0-სკენ.

უნდა აღინიშნოს, რომ $\bar{\varepsilon} = 0$ შემთხვევაში – $\bar{N} \neq N_0$.

$$\bar{N} = \frac{N_0}{T}\int_0^T \varphi(\tau)d\tau \tag{69}$$

თავი II

მათემატიკური და ფიზიკური ამოცანების ამოხსნა MATLAB-ის გარემოში

§1. მარტივი მაგალითები

მაგალითი 1. გამოვთვალოთ გამოსახულება $ln\left(1+5\frac{lg^2 100-0.2\pi}{\sqrt{1+e^3}}\right)$

ამისათვის ბრძანების ფანჯარაში უნდა ავკრიფოთ შემდეგი პროგრამა:

>>log(1+5*((log10(100))^2-0.2*pi)/sqrt(1+2.71828^3))%exp(3)

enter-ი მოგვცემს პასუხს:

ans =

1.5414

მაგალითი 2.

გამოვთვალოთ $\boldsymbol{sin}(\frac{\pi}{3})$:

>>sin(pi/3)

ans =

0.8660

მაგალითი 3.

შევცვალოთ რიცხვის ფორმატი:

>>format long

sin(pi/3)

ans =

0.86602540378444

მაგალითი 4.

რიცხვი π :

pi

ans =

3.14159265358979

მაგალითი 5.

გამოვთვალოთ სითხის მასა, რომლის სიმკვრივეა 800კგ/მ^3 და მოცულობა $V = 0{,}01$მ^3, როგორც $m = \rho \cdot V$:

```
>>format short
rho=800
V=0.01
m=rho*V
```

rho =

800

V =

0.0100

m =

8

იგივე

>>rho=800; V=0.01; m=rho*V

m =

8

§2. ვექტორების წარმოდგენა მატრიცული სახით

მაგალითი 6.

სიჩქარის ვექტორს დეკარტეს კოორდინატთა სისტემაში აქვს სახე:

$$\vec{v} = v_x\vec{\imath} + v_y\vec{\jmath} + v_z\vec{k}.$$

ვთქვათ, მოცემულია ორი ვექტორი: $\vec{v}_1 = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + 4\vec{k}$, $\vec{v}_2 = 4\vec{\imath} + 5\vec{\jmath} + 6\vec{k}$ გამოვთვალოთ ვექტორი $\vec{u} = \vec{\boldsymbol{v}}_1 + \vec{\boldsymbol{v}}_2$

>>**v1=[2 3 4]; v2=[4 5 6]; u=v1+v2**

u =

6 8 10

ჩვენ მივიღეთ ვექტორი $\vec{u} = 6\vec{\imath} + 8\vec{\jmath} + 10\vec{k}$. ვექტორების სხვაობაც გამოითვლება ანალოგიურად.

მაგალითი 7.

გამოვთვალოთ წინა მაგალითში განხილული ვექტორებისათვის ვექტორების სკალარული ნამრავლი $c = \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$. თუ ასე ჩავწერთ, მივიღებთ შეცდომას

v1*v2

??? Error using ==> mtimes

Inner matrix dimensions must agree.

უნდა ჩაიწეროს ასე:

>>**v1*v2'**

ans =

47

პასუხი ცხადია : $c = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 6 = 47$.

მაგალითი 8.

გამოვთვალოთ $\vec{v}_1 = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$ ვექტორის მოდული $|\vec{v}_1| = \sqrt{\vec{v}_1\vec{v}_1}$:

>>**v1=[2 3 4]; sqrt(v1*v1')**

ans =

5.3852

იგივე პასუხი მიიღება ბრძანებით *norm:*

>>**v1=[2 3 4]; norm(v1)**

ans =

5.3852

პასუხი ადვილად მოწმდება : $|\vec{v}_1| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{29} \approx 5.3852$

მაგალითი 9.

საჭიროების შემთხვევაში შესაძლებელია მატრიცების ერთი და იგივე (ერთსახე-ლა) ელემენტების ერთმანეთზე გადამრავლება, გაყოფა, მიმატება და გამოკლება:

```
>>a=[1 2 3]; b=[2 2 3];
c=a.*b
d=a./b
e=a-b
f=a+b
c =
    2    4    9
d =
    0.5000    1.0000    1.0000
e =
    -1    0    0
f =
    3    4    6
```

მაგალითი 10.

ვექტორების ჯამი, სკალარული და ვექტორული ნამრავლი. წარმოვადგინოთ ორი ერთნაირი განზომილების ვექტორი მატრიცის სახით.

a=[6,3,4]; b=[3,1,-6];

c = a + b, ვექტორების ჯამი

c = dot(a,b) სკალარული ნამრავლი

c = cross(a,b) ვექტორული ნამრავლია

ბრძანებათა ველში უნდა ჩაიწეროს:

>>a=[6,3,4]; b=[3,1,-6]; c = a + b, d= dot(a,b), n= cross(a,b)

<Enter> -კლავიშის დაჭერის შემდეგ მივიღებთ შემდეგ ამოხსნას:

c =

9 4 -2

d =

-3

n =

-22 48 -3

მაგალითი 11.

ვთქვათ, მოცემულია კვირის განმავლობაში ჰაერის საშუალო ყოველდღიური ტემპერატურა (°C). ეს მონაცემები მოყვანილია *t* მატრიცის სახით. განვსაზღვროთ მინიმალური ტემპერატურა:

>>t=[-1 0 2 3 -5 -7 -4]; min(t)

ans =

-7

განვსაზღვროთ მაქსიმალური ტემპერატურა:

>>t=[-1 0 2 3 -5 -7 -4]; max(t)

ans =

3

განვსაზღვროთ საშუალო ტემპერატურა:

>>**t=[-1 0 2 3 -5 -7 -4]; mean(t)**

ans =

-1.7143

მაგალითი 12.

განვალაგოთ *t* მატრიცის ელემენტები ზრდის მიხედვით:

>>**t=[-1 0 2 3 -5 -7 -4]; sort(t)**

ans =

-7 -5 -4 -1 0 2 3

იმისათვის, რომ *t* მატრიცის ელემენტები განვალაგოთ კლების მიხედვით. საჭიროა შემდეგი ბრძანება:

>>t=[-1 0 2 3 -5 -7 -4]; -1*sort(-t)

ans =

3 2 0 -1 -4 -5 -7

მაგალითი13 .

მატრიცების ფორმირებისათვის და რიგი ოპერაციის ჩატარებისათვის მატრიცებზე დგება სვეტის ან სტრიქონის წაშლის აუცილებლობა. ამისათვის გამოიყენება ცარიელი ფრჩხილები [ ]. მოვიყვანოთ მაგალითი:

>>M=[1 2 3;4 5 6;7 8 9]

M =

1 2 3
4 5 6
7 8 9

წავშალოთ მეორე სვეტი. ამისათვის გამოიყენება ოპერაცია: (ორი წერტილი)
>> M(:,2)=[]
M =
    1   3
    4   6
    7   9
>> M=[1 2 3;4 5 6;7 8 9]
M =
    1   2   3
    4   5   6
    7   8   9
>> M(:,1)=[]
M =
    2   3
    5   6
    8   9

ახლა შეგვიძლია წავშალოთ მეორე სტრიქონი :
>> M=[1 2 3;4 5 6;7 8 9]
M =
    1   2   3
    4   5   6
    7   8   9
>> M(2,:)=[]
M =
    1   2   3
    7   8   9

ახლა შეგვიძლია, შევცვალოთ ნებისმიერი სვეტის ან სტრიქონის ელემენტები, მაგალითად, შევცვალოთ მეორე სვეტი ელემენტებით [2;4;10]. ამისათვის იწერება ბრძანება:
M=[1 2 3;4 5 6;7 8 9]; M(:,2)= [2;4;10]

მივიღებთ:
M =
    1   2   3
    4   4   6
    7   10   9

§3. ალგებრული და ტრანსცენდენტული განტოლებების ამოხსნის ტექნოლოგია

ალგებრული და ტრანსცენდენტული განტოლებების ამოხსნა MATLAB-ში ხორციელდება „Matlab"-ის ფუნქციების საშუალებით: solve (), f zero (), roots ().

ფუნქცია **solve ()** წარმოიდგინება შემდეგი სახით:
solve ('f (x) ', x),

სადაც: 'f (x) ' ამოსახსნელი განტოლებაა, x- საძებნი უცნობი.

განტოლება f (x)=0 ჩაიწერება ზოგადი სახით. ამასთან, ტოლობის ნიშანი არ იწერება.

3.1. ფუნქცია solve ()

მაგალითი14.

sin x + x -1 = 0.

ამოხსნის პროგრამას შემდეგი სახე აქვს:

```
syms x
Y=solve(sin(x)+x-1==0)
```

<Enter> -კლავიშის დაჭერის შემდეგ მივიღებთ შემდეგ ამოხსნას:

```
Y=
   0.510973
```

ფუნქცია solve () ზოგ შემთხვევაში საშუალებას გვაძლევს, ვიპოვოთ f (x)=0 განტოლების ფესვი x-ის საწყისი მნიშვნელობის მოცემისა და ფესვების არსებობის ინტერვალების მითითების გარეშე.

მაგალითი 15.

2^x-4x+3=0

```
syms x
Y=solve(2 ^ x – 4*x + 3 ==0)
Y=
   1.418
   3.413
```

ვიპოვეთ განტოლების ორივე ფესვი. ფუნქცია solve () საშუალებას იძლევა, ვიპოვოთ არა მარტო განტოლების – f (x)=0 – ნამდვილი ფესვები, არამედ კომპლექსურიც.

მაგალითი 16. ვთქვათ, მოცემულია განტოლება:

sin(x)+ln(x)+e^x-1=0.

უნდა ვიპოვოთ ამ განტოლების ფესვები. პროგრამა მიიღებს შემდეგ სახეს:

```
>>Y=solve(sin(x)+log(x)+exp(x)-1==0)
```

<Enter>-კლავიშის დაჭერის შემდეგ მივიღებთ შემდეგ ამოხსნას:

```
Y =3.055 – 1.71447 i
```

ყურადღება გავამახვილოთ იმ ფაქტზე, რომ კომპლექსური ფესვი მივიღეთ, მაგრამ ფუნქციამ არ მოგვცა ნამდვილი ფესვის მნიშვნელობა: x=0.407.

ფუნქცია solve ()-ს მნიშვნელობა დამატებით გამოიხატება იმაში, რომ ის საშუალებას იძლევა, განტოლება ამოიხსნას ანალიზური სახით.

მაგალითი 17. ამოვხსნათ განტოლება:

$2^x - 3(a-b) = 0.$

ამოხსნას ექნება სახე:

```
>> syms x a b
Y=solve(2^x-3*(a-b)==0')
y= log((3*a-3*b)/log(2))
```

ფუნქცია solve ()-ს მინუსი მდგომარეობს იმაში, რომ ის არ ითხოვს ინფორმაციას ფესვის საწყისი მნიშვნელობის და ფესვის არსებობის არეების შესახებ. ამიტომ ტრანსცენდენტული განტოლებების შემთხვევაში და რიგ სხვა შემთხვევაშიც ის ვერ პოულობს განტოლების ყველა ფესვს.

3.2. განტოლების ნამდვილი ფესვების პოვნა ფუნქცია fzero-ს საშუალებით

ამ ფუნქციას რეალიზების შემდეგი საშუალებები აქვს:

```
fzero (' f (x) ', x)
fzero (' f (x) ', [xl, x2])
fzero ( ' f ( x ) ' , x, tol , trace)
fzero ( ' f ( x ) ' , [xl, x2], tol )
fzero ( ' f ( x ) ' , [xl, x2], tol , trace)
```

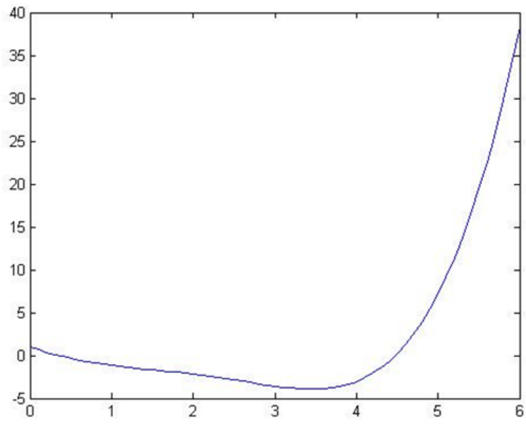
' f (x) ' – ამოსახსნელი განტოლება ერთჯერად „ბრჭყალებში“;
X – საძებნი ფესვის საწყისი – მიახლოებითი მნიშვნელობა;
[xl, x2] – ფესვის იზოლირებული არე;
Tol – ფესვის ამოხსნის წინასწარ მოცემული სიზუსტე;
Trace – ფესვის მნიშვნელობა თითოეულ იტერაციაში.

მაგალითი 18. საჭიროა, ვიპოვოთ ფესვი განტოლებისათვის:

$$2^x-4x + x\sin x = 0$$

ფესვების უახლოესი წერტილების მოსაძებნად ავაგოთ ფუნქციის $y= 2^x-4x + x\sin x$ გრაფიკი, როცა x იცვლება ინტერვალში [0 6], ბიჯით 0.1. პროგრამას ექნება სახე:

```
>>x=0:0.1:6; y=2.^x – 4 * x + x. * sin( x ); plot(x,y)
```



ნახ. 17. ფუნქციის $2^x - 4x + x\sin x$ გრაფიკი

ამ პროცედურის ჩატარების შემდეგ ადვილია ფესვების უახლოესი წერტილების მოძებნა. ეს წერტილებია 1 და 4. განტოლების ამოხსნის პროგრამა ჩაიწერება შემდეგნაირად:

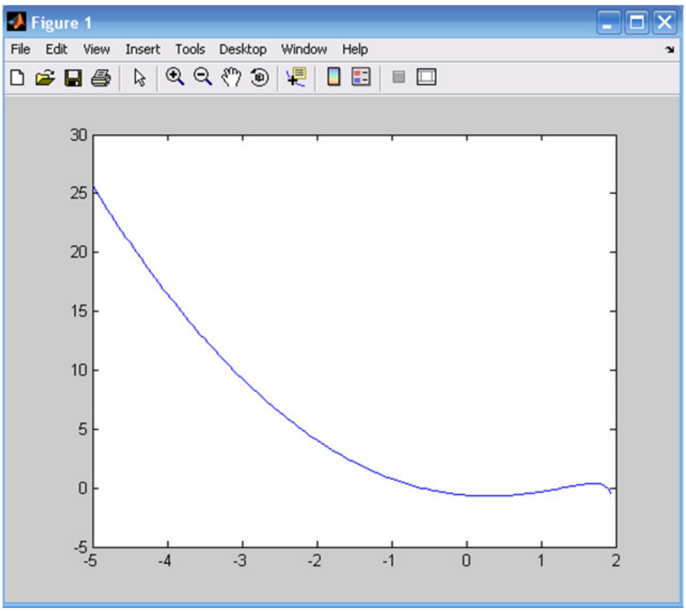
```
>>У = fzero('2^x – 4 * x + x* sin( x ) ',1)
У=
    0.3478
>>У = fzero ( ' 2^x –  4 * x + x * sin ( x ) ' , 4)
Y =
    4.4761
```

(ამ შემთხვევაში 2-თან და x-თან აღარ იწერება (.) წერტილი, რადგან არ გვაქვს მოცემული x-ის ცვლილების ბიჯი და არე).

მაგალითი 19. ვიპოვოთ განტოლების $\ln(4-2x)+x^2-2=0$ ნამდვილი ფესვები

fzero (' f (x) ', [xl, x2]) ფუნქციის გამოყენებით. ამისათვის ავაგოთ ამ ფუნქციის გრაფიკი და გამოვყოთ ფესვის არსებობის ინტერვალი.

```
>>x=-5:0.05:1.95;y= log(4-2*x)+x.^2-2;plot(x,y)
```



ნახ. 18. ფუნქციის ln(4-2x)+x2-2 გრაფიკი

ამ ნახაზიდან ჩანს, რომ ცალკეული ფესვი მოთავსებულია შემდეგ ინტერვალებში: [0;-1], [1;1.5], [1.5; 1.95]. მაშინ ფესვების მისაღებად პროგრამა ჩაიწერება შემდეგნაირად:

```
>>XI = fzero( 'log (4 – 2 * x) + x^2 – 2',[0,-1]);
>>X2 = fzero( 'log ( 4 – 2 * x) + x^2 – 2' , [1,1.5]);
>>X3 = fzero('log ( 4 – 2 * x) + x^2 – 2', [1.5,1.95]);
>>X = [X1,X2,X3]
```

<Enter> კლავიშის დაჭერის შემდეგ მივიღებთ:
x =0.594 1.2774 1.9001
x=2-ის აღება სასაზღვრო წერტილად არ შეიძლება, რადგან ფუნქცია ln(4-2x) ამ წერტილში განუსაზღვრელია.

მაგალითი 20. ახლა განვიხილოთ ის შემთხვევა, როცა განტოლება $\ln(4-2x)+x^2-2=0$ არეში (სეგმენტზე) [-1;0] უნდა ამოვხსნათ 50 იტერაციის შემთხვევაში. პროგრამა ჩაიწერება შემდეგნაირად:

```
>>fzero('log(4-2*x)+x^2-2',[-1,0],50)
```

3.3. მრავალწევრის ფესვის მოძებნა ბრძანება roots( )-ის დახმარებით

ამ ფუნქციას აქვს სახე: **roots(z);** სადაც z მრავალწევრის კოეფიციენტებისაგან შედგენილი ვექტორია.

განვიხილოთ მაგალითები:

მაგალითი 21.

$y = 2x^5 - 3x^4 + 5x^3 + x^2+7x + 3; \quad 2x^5 + 5x^3 + x^2+7x =0$

ამოხსნას აქვს სახე:

```
>>Y = roots([2 -3 5 1 7 3])
Y=
   1.2189 + 1.4110 i
   1.2189 – 1.4110 i
   -0.2719 + 1.0105 i
   -0.2719 – 1.0105 i
   -0.3940.
```

როცა მრავალწევრში არ შედის წევრი $x^к$, მაშინ ითვლება, რომ $a_к= 0$.

მაგალითი 22. ვიპოვოთ განტოლების $X^{10}-1=0$ ფესვები. მაშინ პროგრამას ექნება სახე:

```
>>z=[1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1];
y=roots(z)
Y =
   -1
   -0.8090 + 0.5878 i
   -0.8090 – 0.5878 i
   -0.3090 + 0.8511 i
   -0.3090 – 0.8511 i
   0.3090 + 0.8511 i
   0.3090 – 0.8511 i
   1
   0.8090 + 0.5878 i
   0.8090 – 0.5878 i
```

3.4. წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა

მაგალითი 23. ამოვხსნათ შემდეგი სისტემა:

$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 14$
$2x_1 - x_2 - 5x_3 = -15$
$x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -4$

მოცემულ შემთხვევაში

A = $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -5 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$, B=$[14 \quad -15 \quad -4]$, x=$[\mathrm{x1} \quad \mathrm{x2} \quad \mathrm{x3}]$

მაშინ ამოხსნა მოიძებნება შემდეგი პროგრამის სახით:

```
>>a=[2 3 4; 2 -1 -5; 1 -2 -3]; b=[14; -15; -4]; x=a\b
x =
    3
    -4
    5
```

მაგალითი 24. ვთქვათ, გვაქვს სამუცნობიანი წრფივ განტოლებათა სისტემა:

$2x_1 + x_2 - 3x_3 = 1$
$x_1 - x_2 + 2x_3 = 18$
$7x_1 + 5x_2 + x_3 = 3$

ამოხსნისათვის საჭიროა, შევქმნათ შესაბამისი m-File

```
A = [2 1 -3; 1 -1 2; 7 5 1];
B = [1; 18; 3];
X = A \ B
```

და დავაჭიროთ თითი F5-ს, მივიღებთ პასუხს ასეთი სახით:

```
X =
    6.7111
    -9.0222
    1.1333
```

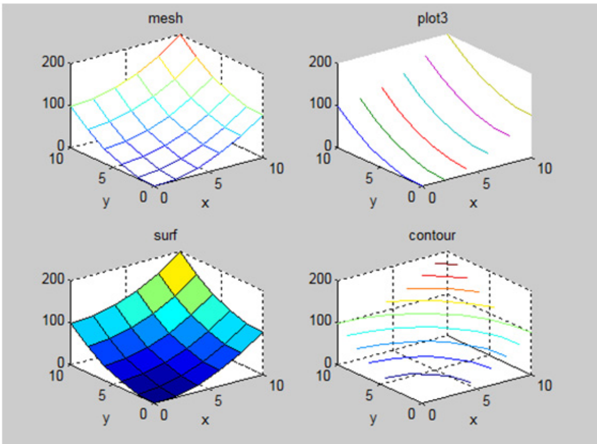
§4. ფუნქციების გრაფიკების აგება

მაგალითი 25. ავაგოთ ფუნქციის $z=x^2+y^2$ გრაფიკი $0 \le x \le 10$ და $0 \le y \le 10$ ინტერვალებისათვის. ამისათვის სიბრტყე იფარება კოორდინატული ბადით და ფუნქციის მნიშვნელობები განისაზღვრება მის კვანძებში. ბადის სიმკვრივე განისაზღვრება კოორდინატთა ღერძების დაყოფის ბიჯით. მოცემულ მაგალითში ეს ბიჯი შევარჩიოთ 2-ის ტოლად. თვით ბადე მოიცემა ბრძანება meshgrid-ის საშუალებით. პროგრამას ექნება სახე:

```
[X, Y] = meshgrid(0:2:10, 0:2:10);
Z=X.^2+Y.^2;
subplot(2,2,1); mesh(X, Y, Z);
```

```
title ('mesh'); xlabel('x'); ylabel('y')
subplot(2,2,2); plot3(X, Y, Z);
title ('plot3'); xlabel('x'); ylabel('y')
subplot(2,2,3); surf(X, Y, Z);
title ('surf'); xlabel('x'); ylabel('y')
 subplot(2,2,4); contour3(X, Y, Z);
 title ('contour'); xlabel('x'); ylabel('y')
```

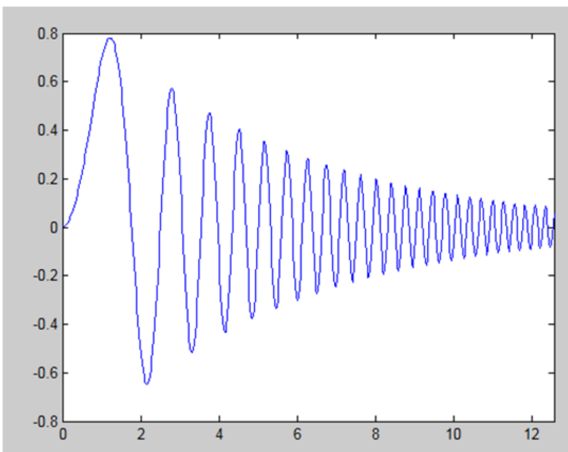
შევქმნათ შესაბამისი m-File და დავაჭიროთ თითი F5-ს. აიგება სამგანზომილებიანი 4 გრაფიკი.



ნახ. 19

მაგალითი 26. ავაგოთ ფუნქციის გრაფიკი, რომელიც მოცემულია ანალიზური სახით. exp(-0.2*x)*sin(x^2) , ინტერვალში [0÷4π], ეს მარტივად კეთდება ფუნქცია **fplot**-ის საშუალებით

>>fplot('exp(-0.2*x)*sin(x^2)',[0 4*pi]), გრაფიკს აქვს შემდეგი სახე:

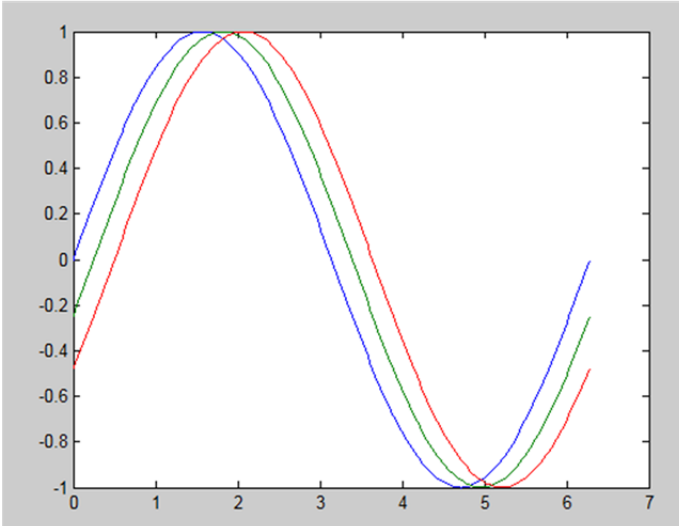


ნახ. 20

მაგალითი 27. სამი სხვადასხვა გრაფიკის ერთ ფურცელზე გამოტანა:

```
t = 0:pi/100:2*pi;
y1 = sin(t);
y2 = sin(t-.25);
y3 = sin(t-.5);
plot( t, y1, t, y2, t, y3)
```

მივიღებთ:



ნახ. 21

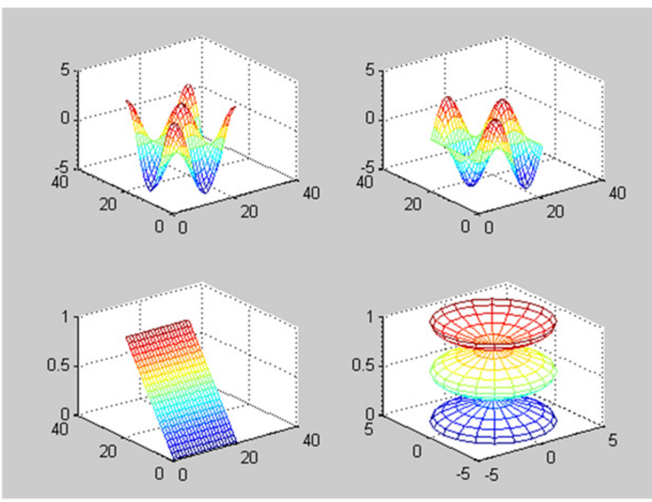
ქვეგრაფიკები: ბრძანება *subplot-ი* საშუალებას იძლევა, ერთ ფანჯარაში გამოვიყვანოთ მრავალი გრაფიკი.

ბრძანება subplot(m,n,p) გამოსახულების ფანჯარას ყოფს (m,n) განზომილების ქვეგრაფიკების მატრიცად. p ქვეგრაფიკის რიგითი ნომერი.

4 გრაფიკი სხვადასხვა კუთხეში შემდეგნაირად განლაგდება: გრაფიკები ინომრება პირველი ზედა სტრიქონის გასწვრივ, შემდეგ მომდევნო ქვედა სტრიქონის გასწვრივ და ა. შ. პირველი 2,2 ნიშნავს 2x2 კვადრატულ მატრიცას, ხოლო შემდეგ მოსდევს გრაფიკების ნუმერაცია 1,2,3,4.

მაგალითი 28.

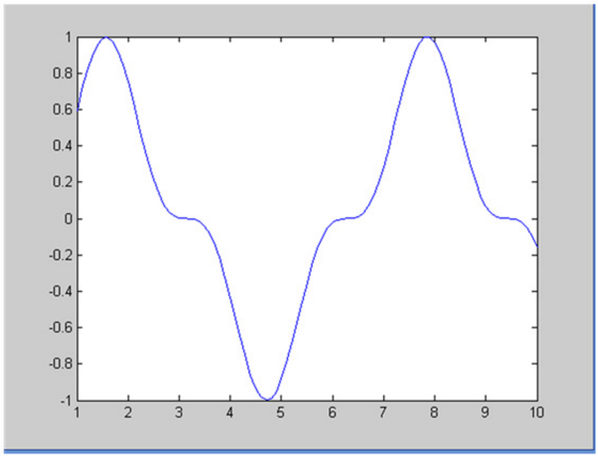
```
t = 0:pi/10:2*pi;
[X,Y,Z] = cylinder(4*cos(t));
subplot(2,2,1)
mesh(X)
subplot(2,2,2); mesh(Y)
subplot(2,2,3); mesh(Z)
subplot(2,2,4); mesh(X,Y,Z)
```



ნახ. 22

მაგალითი 29.

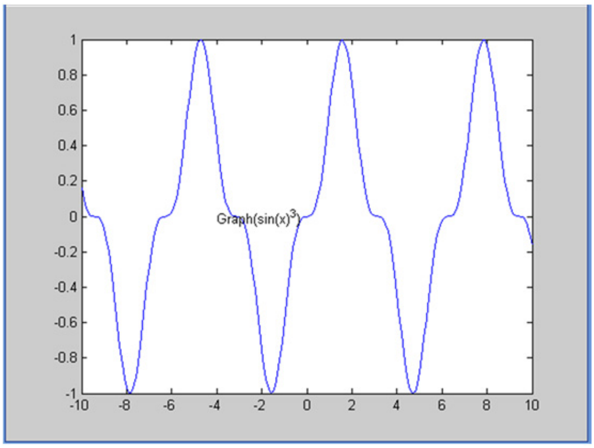
x=1:0.1:10; plot(x,sin(x).^3)



ნახ. 23

მაგალითი 30.

x=-10:0.1:10;
plot(x,sin(x).^3)
text(-4,0,7,'Graph(sin(x)^3)')

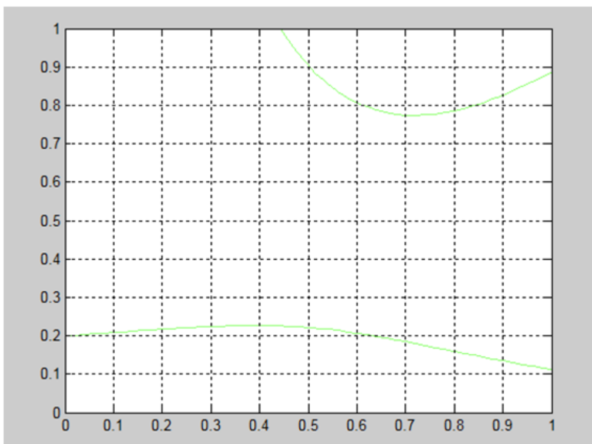


ნახ. 24

4.1. არაცხადი ფუნქცია

მაგალითი 31.

ავაგოთ არაცხადი ფუნქციის გრაფიკი $f(x,y)\equiv x^3y-2xy^2+y-0.2=0$, x,y=[0, 1]. ამას ასრულებს პროგრამა h=.02; x=0:h:1; [X,Y]=meshgrid(x); f=X.^3.*Y-2*X.*Y.^2+Y-.2; contour(x,x,f), grid



ნახ. 25

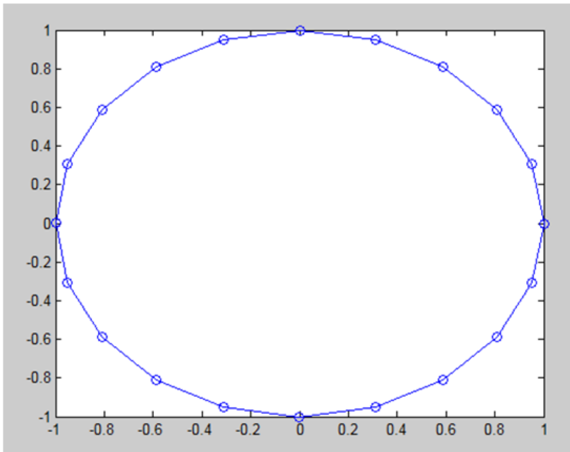
4.2. წარმოსახვითი და კომპლექსური მონაცემები

იმ შემთხვევაში, როცა ფუნქცია *plot*-ის არგუმენტი კომპლექსური რიცხვია, მაშინ ხდება წარმოსახვითი ნაწილის იგნორირება. სხვა შემთხვევაში, როცა z კომპლექსური ვექტორია ან მატრიცა, მაშინ plot(z) ნიშნავს რეალური ნაწილის წარმოსახვითზე დამოკიდებულების გრაფიკის აგებას. ის ექვივალენტურია plot(real(Z),imag(Z))-სი.

მაგალითი 32.

```
t = 0:pi/10:2*pi;
plot(exp(i*t),'-o')
```

გამოსახავს ოცგვერდიან მრავალკუთხედს, რომლის წვეროებშია პატარა წრეები.



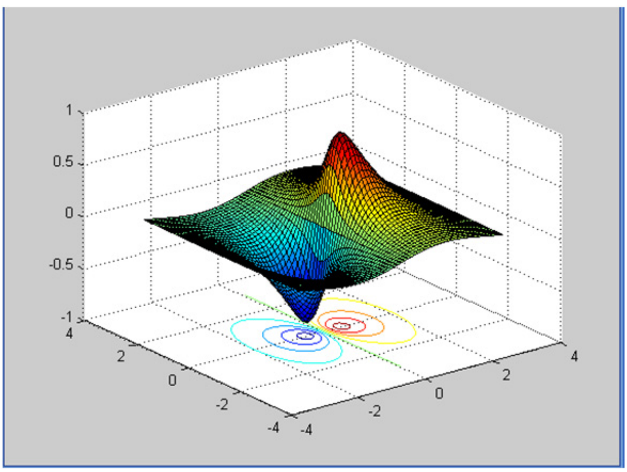
ნახ. 26

4.3. ზედაპირის აგება

მაგალითი 33.

ზედაპირის აგება პროექციით:

» [X,Y]=meshgrid([-3:0.1:3]); Z=sin(X)./(X.^2+Y.^2+0.3);surfc(X,Y,Z)

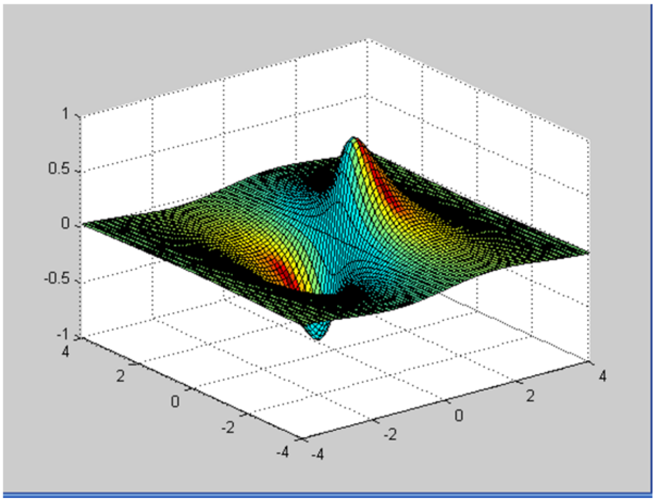


ნახ. 27

მაგალითი 34.

ზედაპირის აგება (პროექციის გარეშე)

[X,Y]=meshgrid([-3:0.1:3]); Z=sin(X)./(X.^2+Y.^2+0.3);surfl(X,Y,Z)

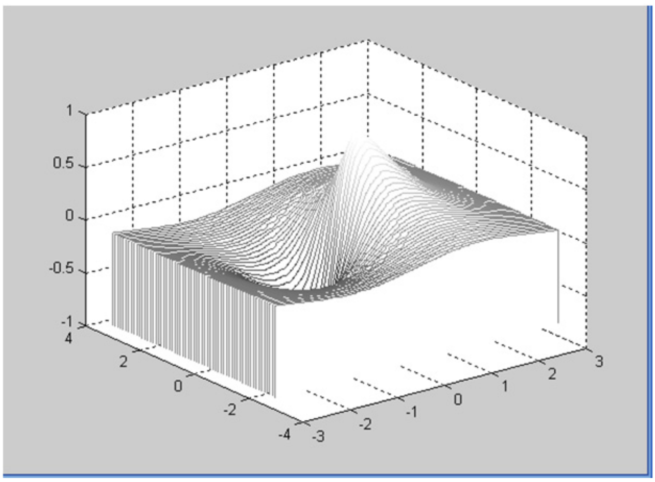


ნახ. 28

მაგალითი 35.

იგივე ზედაპირის გამოსახვა ფერების გარეშე :

```
[X,Y]=meshgrid([-3:0.1:3]); Z=sin(X)./(X.^2+Y.^2+0.3);
waterfall(X,Y,Z)
colormap(gray)
shading interp
```



ნახ. 29

§5. ფუნქციის ზღვარი და ინტეგრალი

მატლაბში ზღვრის მოძებნა ხდება limit(f, x, x0) ფუნქციის საშუალებით, სადაც: f ფუნქციაა, რომლის ზღვარიც უნდა მოიძებნოს. X – არგუმენტი, x0 – არგუმენტის ზღვრული მნიშვნელობა. როდესაც არგუმენტი მისწრაფვის უსასრულობისაკენ მატლაბში, ეს აღინიშნება, როგორც inf.

მაგალითი 36. ვიპოვოთ შემდეგი ფუნქციების ზღვარი:

$Y_1 = \frac{\sin(x)}{x}$ როცა $x \to 0$

ამოხსნის სახეა:

```
>>syms x;
limit(sin(x)/x, 0)
ans =
      1
```

$Y_2 = \frac{(1-e^{-x})}{x}$ როცა $x \to \infty$

ამოხსნის სახეა:

```
syms x;
limit((1-exp(-x))/x,inf)
ans =
      0
```

$Y_3 = \frac{(1-\mathrm{x})}{lnx}$ როცა $x \to 1$

ამოხსნის სახეა:

```
>>syms x;
limit((1-x)/log(x), 1)
ans =
      -1
```

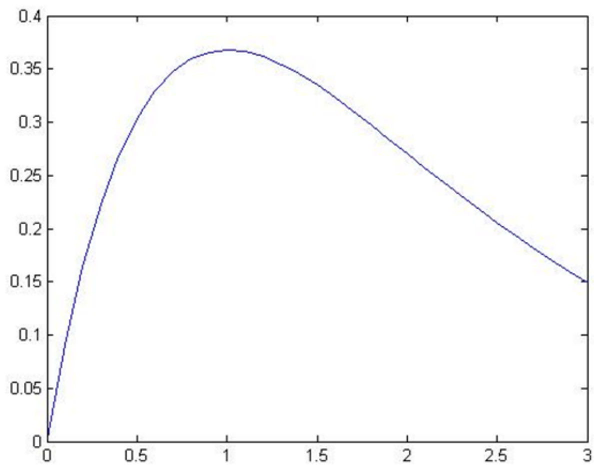
5.2. ფუნქციის მაქსიმუმის პოვნა

მაქსიმუმის პოვნისათვის აუცილებელია, ვიპოვოთ ის არე ($x_1<x<x_2$) , რომელშიც მოთავსებულია ეს მაქსიმუმი. ამისათვის საჭიროა, ავაგოთ გრაფიკი. განვიხილოთ **მაგალითი 37**:

$Y = xe^{-x}$

ავაგოთ ამ ფუნქციის გრაფიკი

```
>>x=0:0.1:3;y=x.*exp(-x);plot(x,y)
```



ნახ. 30

ვხედავთ, რომ ფუნქცია მაქსიმუმს აღწევს ინტერვალში (0.5 ÷ 1.5). ახლა ვიპოვოთ ამ ფუნქციის წარმოებული. ეს აუცილებელია იმისათვის, რომ ვიპოვოთ წარმოებულის ნულოვანი მნიშვნელობა ამ ინტერვალში. წარმოებულის ნული შეესაბამება ფუნქციის ექსტრემუმს.

პროგრამა მიიღებს შემდეგ სახეს:

```
>> syms x;  y=x*exp(-x);
z=diff(y,x)
%მივიღებთ:
z =
exp(-x)-x*exp(-x)
>> solve(exp(-x)-x*exp(-x)==0)
ans=
      1
```

ფუნქციის მნიშვნელობის საპოვნელად უნდა გავაგრძელოთ:

```
>>x=1;
y=x*exp(-x)
y=
    0.3679
```

მაგალითი 38.იგივე ამოცანა გადაწყდება უფრო მარტივად ფუნქცია fmin-ის საშუალებით:

```
>>fminbnd('-x.*exp(-x)',0.5,1.5)
ans =
      1.0000
```

ე.ი ვიპოვეთ არგუმენტის მნიშვნელობა, რომელიც შეესაბამება მაქსიმუმს. როცა ვეძებთ მაქსიმუმს, ფუნქციის წინ იწერება (-) მინუს ნიშანი.

5.3. ინტეგრალის ამოხსნა

მაგალითი 39. ვთქვათ, ამოვხსნათ შემდეგი ინტეგრალი ტრაპეციის მეთოდით:

$$\int_{0}^{10} (xe^{-x} + lnx + 1)dx\,.$$

პროგრამას აქვს შემდეგი სახე:

```
>>x=1:0.1:10; y=x.*exp(-x)+log(x)+1; cumtrapz(y) %დავაჭიროთ enter-ს მაშინ მივიღებთ:
ans =
    Columns 1 through 9
       0   1.4147   2.9173   4.4975   6.1467   7.8576   9.6242   11.4413   13.3046
    Columns 10 through 18
```

15.2103 17.1552 19.1366 21.1523 23.2002 25.2785 27.3859 29.5209 31.6826

Columns 19 through 27

33.8699 36.0820 38.3181 40.5776 42.8599 45.1645 47.4910 49.8388 52.2077

Columns 28 through 36

54.5973 57.0072 59.4371 61.8869 64.3561 66.8446 69.3521 71.8784 74.4233

Columns 37 through 45

76.9865 79.5678 82.1670 84.7839 87.4183 90.0701 92.7389 95.4246 98.1271

Columns 46 through 54

100.8461 103.5815 106.3330 109.1005 111.8837 114.6826 117.4969 120.3265 123.1711

Columns 55 through 63

126.0306 128.9049 131.7937 134.6969 137.6143 140.5458 143.4912 146.4503 149.4230

Columns 64 through 72

152.4091 155.4085 158.4211 161.4466 164.4849 167.5359 170.5995 173.6754 176.7636

Columns 73 through 81

179.8640 182.9763 186.1006 189.2365 192.3841 195.5432 198.7136 201.8952 205.0880

Columns 82 through 90

208.2919 211.5066 214.7321 217.9682 221.2150 224.4722 227.7398 231.0176 234.3056

Column 91

237.6036

მაგალითი 40. ამოვხსნათ ინტეგრალი

$$\int_{0}^{10} (xe^{x} + lnx + 1)dx$$

x=1:0.1:10; y=x.*exp(x)+log(x)+1; cumtrapz(y) დავაჭიროთ enter-ს მაშინ მივიღებთ:
ans = 1.0e+006 *

Columns 1 through 8

0 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000

Columns 9 through 16

0.0001   0.0001   0.0001   0.0001   0.0001   0.0001   0.0002   0.0002

Columns 17 through 24

0.0002   0.0003   0.0003   0.0004   0.0004   0.0005   0.0006   0.0007

Columns 25 through 32

0.0008   0.0009   0.0010   0.0011   0.0013   0.0015   0.0017   0.0019

Columns 33 through 40

0.0022   0.0025   0.0028   0.0032   0.0037   0.0041   0.0047   0.0053

Columns 41 through 48

0.0060   0.0068   0.0077   0.0087   0.0098   0.0111   0.0126   0.0142

Columns 49 through 56

0.0160   0.0180   0.0203   0.0229   0.0258   0.0290   0.0327   0.0367

Columns 57 through 64

0.0413   0.0465   0.0523   0.0587 0.0660   0.0742   0.0833   0.0935

Columns 65 through 72

0.1050   0.1178   0.1322   0.1483   0.1663   0.1865   0.2091   0.2343

Columns 73 through 80

0.2626   0.2942   0.3296   0.3692   0.4134   0.4629   0.5182   0.5800

Columns 81 through 88

0.6491   0.7263   0.8126   0.9090   1.0167   1.1370   1.2713   1.4213

Columns 89 through 91

1.5888   1.7758   1.9846

ტრაპეციის მეთოდის ძირითადი მინუსია ის, რომ მას ახასიათებს დაბალი სიზუსტე.

მოცემულ (განუსაზღვრელ) ინტეგრალს (საზღვრების გარეშე) ზუსტი ანალიზური ამონახსნი აქვს:

$$\int(xe^x + lnx + 1)dx = e^x(x-1) + xlnx$$

მაგალითი 41.

x=[1,3,7,9,10], y=[1,3,5,6,7] საჭიროა ამოიხსნას ინტეგრალის მნიშვნელობა ტრაპეციის დაგროვების მეთოდით:

>>x=[1,3,7,9,10]; y=[1,3,5,6,9]; cumtrapz(x,y) %დავაჭიროთ enter-ს მაშინ მივიღებთ:

ans =

0   4.0000   20.0000   31.0000   38.5000

აქ ინტეგრალის S_i გამოთვლა დაგროვებით ხორციელდება i-ურ ბიჯზე შემდეგი ფორმულით:

$$S_i = S_{i-1} + \left(\frac{y_i}{2} + \frac{y_{i+1}}{2}\right)\Delta x$$

აქ S_{i-1} ინტეგრალის წინა მნიშვნელობაა, ხოლო y_i, y_{i+1} ფუნქციის მნიშვნელობებია ინტერვალის დასაწყისში და ბოლოში. $\Delta x;$ [9,10]

ინტეგრალების ბიჯია უბანზე $[y_i, y_{i+1}]$. ჩვენი მაგალითისათვის გამოთვლებს შემდეგი სახე ექნებათ:

ვექტორის უბანზე [1;3]:

$$S_1 = 0 + \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right) \times 2 = 4;$$

უბანზე [3;7]:

$$S_2 = S_1 + \left(\frac{3}{2} + \frac{5}{2}\right) \times 4 = 20;$$

უბანზე [7,9]:

$$S_3 = S_2 + \left(\frac{5}{2} + \frac{7}{2}\right) \times 2 = 32;$$

უბანზე [9;10]:

$$S_4 = S_3 + \left(\frac{7}{2} + \frac{9}{2}\right) \times 1 = 40;$$

როგორც ჩანს, ფუნქცია cumtrapz(x,y) გამოთვლის ინტეგრალს დაგროვებით ცვლადი ბიჯით Δx.

მაგალითი 42. განვიხილოთ შემთხვევა, როცა ფუნქცია მოცემულია ანალიზური სახით

$y = xe^x + lnx + 1.$ თუ ფუნქცია მოცემულია ანალიზური სახით, მაშინ x-ცვლადი მოცემული უნდა იყოს ვექტორის სახით, პროგრამას ექნება შემდეგი სახე:
>>x=1:0.5:10; y=x.*exp(x)+log(x)+1; trapz(y) % დავაჭიროთ enter-ს, მაშინ მივიღებთ:
ans =

4.0657e+005

მაგალითი 43. ვთქვათ, Y(x) ფუნქციის არგუმენტია x=[1 3 7 9 10], ხოლო ფუნქცია მატრიცა –

y=[1 3 5; 3 5 7; 4 6 8; 4 7 9; 5 7 10]

გამოვთვალოთ ინტეგრალი ტრაპეციის მეთოდით:

არგუმენტის ერთ მნიშვნელობას შეესაბამაბა ფუნქციის სამი სხვადასხვა მნიშვნელობა, ამიტომ შედეგში მოცემული იქნება სამი პასუხი.
>> x=[1 3 7 9 10]; y=[1 3 5; 3 5 7; 4 6 8; 4 7 9; 5 7 10]; trapz(x,y)% დავაჭიროთ enter-ს მაშინ
მივიღებთ:
ans =

30.5000 50.0000 68.5000

5.4. ფუნქცია quad('fun',a,b)

აქ fun ნიშნავს ინტეგრალქვეშა ფუნქციის სახეს, ხოლო a, b ინტეგრალის საზღვრებს

მაგალითი 44. ვიპოვოთ ფუნქციის $f(x) = e^x + x^2 + 2sinx - 5$ განსაზღვრული ინტეგრალი

$$\int_1^5 f(x)dx$$

>>y='exp(x)+x.^2+2*sin(x)-5'; quad(y,1,5)
% როცა დავაჭერთ "enter"-ს, მივიღებთ პასუხს:
ans =
    167.5415

ფუნქცია quad('fun',a,b,tol) დამატებით განსაზღვრავს ამოხსნის სიზუსტესაც. როცა არაა მითითებული სიზუსტე, მაშინ იგულისხმება tol=1.e-3 (ანუ 10^{-3}) სიზუსტე.

მაგალითი 45:

>>quad('exp(x)+x.^2+2*sin(x)-5',1,5,1e-7)
როცა დავაჭერთ "enter"-ს, მივიღებთ:
ans =
    167.5415

5.5. ფუნქცია dblquad('fun',a,b,c,d)

***ფუნქცია dblquad**('fun',a,b,c,d)* გამოიყენება ორჯერადი ინტეგრალის გამოსათვლელად.

მაგალითი 46. განვიხილოთ მაგალითი $z = x^2 + y^2 - 2$ და ამოვხსნათ ორჯერადი ინტეგრალი

$$\int_1^2 \int_0^3 z(x,y)dxdy$$

ორჯერადი ინტეგრალის ამოხსნისათვის გვექნება:

>>z='x.^2+y.^2-2'; dblquad(z,1,2,0,3)

% როცა დავაჭერთ "enter"-ს, მივიღებთ:

ans =

    10

პასუხი მიიღება სიზუსტით, რომელიც არ აღემატება 10^{-3}-ს.

სიზუსტის გაზრდის (10^{-7}-მდე) მიზნით, უნდა ჩავწეროთ შემდეგი სახით:
>>z='x.^2+y.^2-2'; dblquad(z,1,2,0,3,1e-7)

მაგალითი 47.

ეს პროგრამა წინასწარმეტყველებს ბაქტერიების გამრავლებას კოლონაში 6 საათის განმავლობაში

```
yold =1;
t = 1:6;
ynew = yold.*exp(1.386*t);
table(:,1) = t';
table(:,2) = ynew';
disp('Bacteria Growth')
disp('Hours and Number of Bacteria')
disp(table)
```

```
%მივიღებთ:
Bacteria Growth
Hours and Number of Bacteria
    1.0e+003 *
    0.0010    0.0040
    0.0020    0.0160
    0.0030    0.0639
    0.0040    0.2557
    0.0050    1.0225
    0.0060    4.0888
End
```

§6. განაწილების ფუნქციის აგება

ავაგოთ უწყვეტი ფუნქციის – მაქსველის განაწილების გრაფიკი, რომელიც გვიჩვენებს იდეალური აირის მოლეკულების განაწილებას სიჩქარეების მიხედვით. ამ განაწილების ალბათობის სიმკვრივე მოიცემა შემდეგნაირად:

$$f(v) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2kT}\right)^{\frac{3}{2}} v^2 \cdot exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right),$$

სადაც v ნაწილაკის სიჩქარეა, *m*-მასა, *T* – გაზის ტემპერატურაა, $k = 1.38 \cdot 10^{-23}$ ჯ/კელ ბოლცმანის მუდმივაა. ფუნქცია $f(v)$ ნორმირებულია:

$$\int_0^{\infty} f(v)dv = 1.$$

ავაგოთ $f(v)$ ფუნქციის გრაფიკი აირისათვის, რომელიც შედგება წყალბადის H_2 მოლეკულებისაგან, m = 3.32^{x}10^{-27} კგ და T = 350K. ამისათვის გამოვიყენოთ ბრძანება *plot*, ბრძანება *grid* დაადებს ბადეს ამ გრაფიკზე.

მაგალითი 48.

მაქსველის განაწილება სიჩქარეების მიხედვით

```
m=3.32e-27; k=1.38e-23; T=250;
```

მოიცემა ბიჯების რიცხვი და ბიჯი ორდინატთა ღერძის გასწვრივ

```
n=2500; step=2;
```

სიჩქარისა და განაწილების ფუნქციის საწყისი მნიშვნელობები

```
v(1)=0; f(1)=0;
   a=m/(2*k*T);
   b=4/sqrt(pi);
```

ციკლში იქმნება სიჩქარისა და განაწილების ფუნქციის მასივები

```
for i=2:n
v(i)=v(i-1)+step;
f(i)=b*a^1.5*v(i)^2*exp(-a*v(i)^2);
end

plot(v,f), grid
set(gca,'FontName','Arial');
title('Maqsvell distribution','FontSize',14)
xlabel('velocity');
ylabel('density of probability');
v1=sqrt(8*k*T/pi/m)
v2=sum(v.*f)/sum(f)
sm=sum(f*step)

v1 =
      1.6267e+003
v2 =
      1.6266e+003
sm =
      1.0000
```

ფუნქციის გრაფიკთან ერთად მოყვანილია გამოთვლების შედეგები სამი სიდიდისათვის: υ_1 ნაწილაკების საშუალო სიჩქარისათვის, რომელიც გამოითვლება ფორმულით:

$$< v >= \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

υ_2 იგივე სიდიდეა, მაგრამ გასაშუალებული გამოთვლილი მრუდის მიხედვით; *sm* – ფართი, რომელსაც მოიცავს განაწილების ფუნქციის მრუდი. ეს ფართი ახლოსაა 1-თან. ჩანს მცირე განსხვავება υ_1 და υ_2 სიჩქარეებს შორის. ფორმატისათვის *Format long sm*-ფართი განსხვავებულია ერთისაგან, რაც დაკავშირებულია რიცხ-

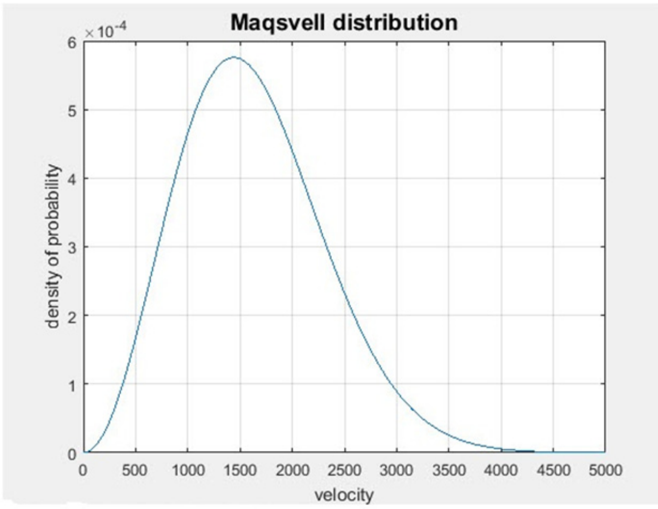
ვითი გამოთვლების უზუსტობასთან. გამოთვლების სიზუსტის გაზრდის მიზნით, საჭიროა, გავზარდოთ ბიჯების რიცხვი *n* და შევამციროთ ბიჯის ზომა *step*.

(შენიშვნა: ამ პროგრამაში გამოიყენება ციკლის ოპერაცია)

for i=2:n

…

end



ნახ. 31

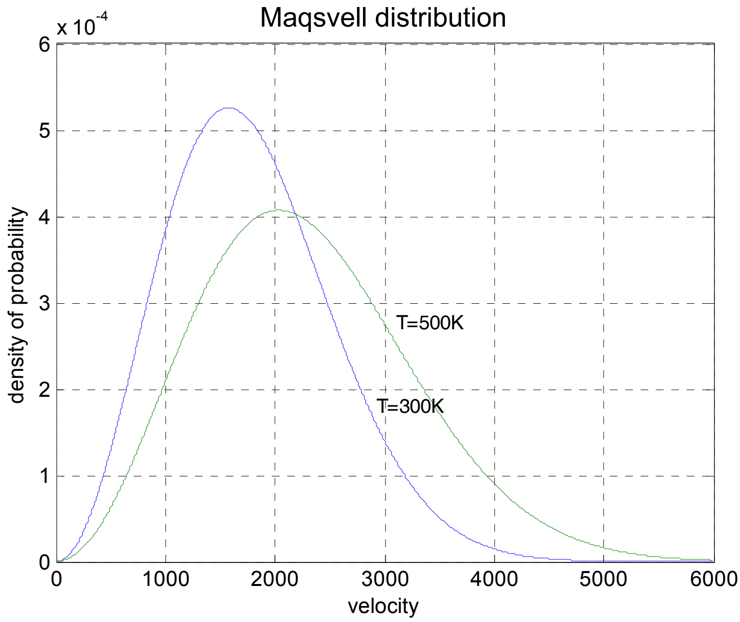
ანუ ბრძანებების სტრიქონები, რომლებიც მოთავსებული არიან ამ სტრიქონებს შორის, შესრულდებიან ციკლურად ცვლადი i-სათვის, რომელიც იცვლება მოცე-მულ საზღვრებში ერთის ბიჯით, თუ სპეციალურად არ მივუთითებთ ბიჯს.

მაგალითი 49.

ავაგოთ ერთ გრაფიკზე მაქსველის განაწილება წყალბადის მოლეკულებისათვის ორი სხვადასხვა ტემპერატურისათვის (300 და 500K).

```
% მაქსველის განაწილება სიჩქარეების მიხედვით
m=3.32e-27; k=1.38e-23; T1=300; T2=500;
მოიცემა ბიჯების რიცხვი და ბიჯი ორდინატთა ღერძზე
n=3000; step=2;
სიჩქარის საწყისი მნიშვნელობა და განაწილების ფუნქციის საწყისი მნიშვნელობა
v(1)=0; f1(1)=0; f2(1)=0;
ციკლში იქმნება სიჩქარისა და განაწილების ფუნქციის მასივები
for i=2:n
v(i)=v(i-1)+step;
f1(i)=4/sqrt(pi)*(m/(2*k*T1))^1.5*v(i)^2*exp(-m*v(i)^2/(2*k*T1));
f2(i)=4/sqrt(pi)*(m/(2*k*T2))^1.5*v(i)^2*exp(-m*v(i)^2/(2*k*T2));
end
```

```
plot(v,f1,v,f2), grid
set(gca,'FontName','Arial');
title('Maqsvell distribution','FontSize',14)
xlabel('velocity');
ylabel('density of probability');
hgt=gtext('T=300K'); hgt=gtext('T=500K');
```



ნახ. 32. მაქსველის განაწილება წყალბადის მოლეკულებისათვის

(შენიშვნა: *წარწერები გრაფიკებზე გაკეთებულია ბრძანება* ***gtext****-ის საშუალებით.)*

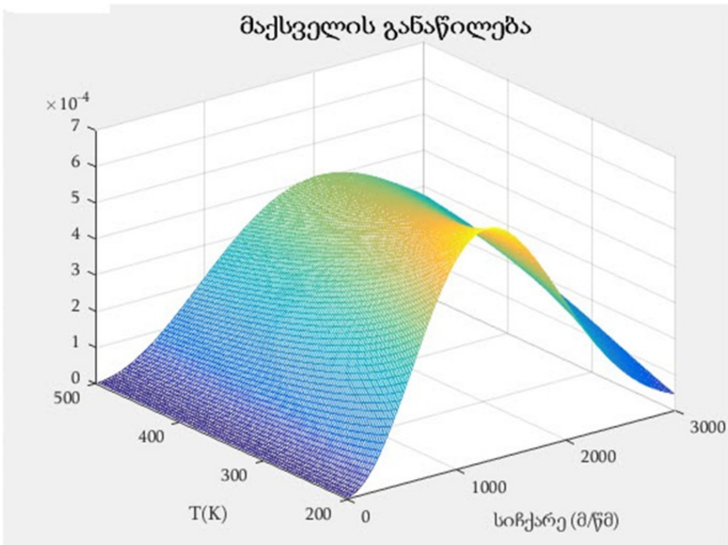
შემდეგ მაგალითში მოყვანილია განაწილების ფუნქციის $f(v,T)$ დამოკიდებულებები სიჩქარეებისა და ტემპერატურების ფართო დიაპაზონებში:

მაგალითი 50.

```
m=3.32e-27; k=1.38e-23;
p=sqrt(pi); a=4/p; b=m/2/k;
[v, t] = meshgrid(30:30:3000, 203:3:500);
z3=v.^2; z4=t.^(-1);
z1=log(a*b^1.5*z4.^1.5); z2=log(z3);
z5=b*z3.*z4; z6=z1+z2-z5;
% საწყისი ფუნქცია ჯერ გალოგარითმდება და შემდეგ გარდაიქმნება ექსპონენ-
ტად %
z=exp(z6);
mesh(v, t, z)
```

```
set(gca,'FontName','Sylfaen');
title('მაქსველის განაწილება','FontSize',14)
xlabel('სიჩქარე (მ/წმ)'); ylabel('T(K)')
```

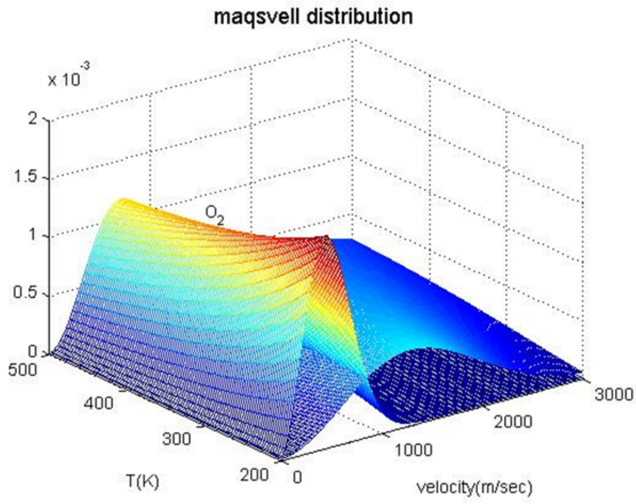
% – პროცენტის ნიშანს ვიყენებთ იმ მიზნით, რომ შეიძლება პროგრამის და ტექსტის ერთად მონიშვნა და პირდაპირ ჩასმა ბრძანებათა ველში, ან m-ფაილში. %



ნახ. 33

მაგალითი 51. ავაგოთ ერთ გრაფიკზე სამგანზომილებიანი გრაფიკები წყალბადისთვის და ჟანგბადისთვის:

```
clear; k=1.38e-23; p=sqrt(pi); a=4/p;
[v, t] = meshgrid(30:30:3000, 203:3:500);
for   i=1:2
      if i==1; m=3.32e-27; end ;
      if i==2; m=8*3.32e-27; end ;
b=m/2/k; z3=v.^2; z4=t.^(-1); z1=log(a*b^1.5*z4.^1.5);
z2=log(z3); z5=b*z3.*z4; z6=z1+z2-z5; z=exp(z6);
mesh(v, t, z); hold on; mesh(v, t, z)
end
set(gca,'FontName','Arial Cyr');
title('maqsvell distribution','FontSize',14)
xlabel('velocity(m/sec)'); ylabel('T(K)')
text(400,350,1.55e-3,'O_2')
text(300,100,1.3e-3,'H_2')
```



ნახ. 34

§7. რხევები და ტალღები

7.1. ლისაჟუს ფიგურები

მაგალითი 52. ავაგოთ ფუნქციის გრაფიკი, რომელიც განსაზღვრულია პარამეტ-რულად:

$$\begin{cases} x = a_1 \cos(w_1 t) \\ y = a_2 \cos(w_2 t) \end{cases}.$$

თუ $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ შეფარდება რაციონალურია, მაშინ მიიღება ლისაჟუს ფიგურები. პრო-ტოკოლის შესაქმნელად და მის შესანახად ფაილის სახით გამოიყენება ბრძანება **diary<**ფაილის სახელი>. ასეთი პროტოკოლი შეიძლება სასარგებლო იყოს ამო-ნახსნის შემდგომი ანალიზისათვის, ხოლო ზოგიერთი დამატების საშუალებით, შეიძლება გამოვიყენოთ, როგორც პროგრამა-სცენარის დასაწერად შემდგომში ანალოგიური ამოცანების ამოსახსნელად.

% გამოსახულება მრუდის, რომელიც მოიცემა პარამეტრულად %

% ამპლიტუდისა და სიხშირის მოცემა

>>a1=1.2; a2=1.0; w1=1.5;w2=1.0;

% წერტილ-მძიმე ოპერატორის შემდეგ განაპირობებს იმას, რომ არ გამოვა % ოპერატორის მოქმედების შედეგი %

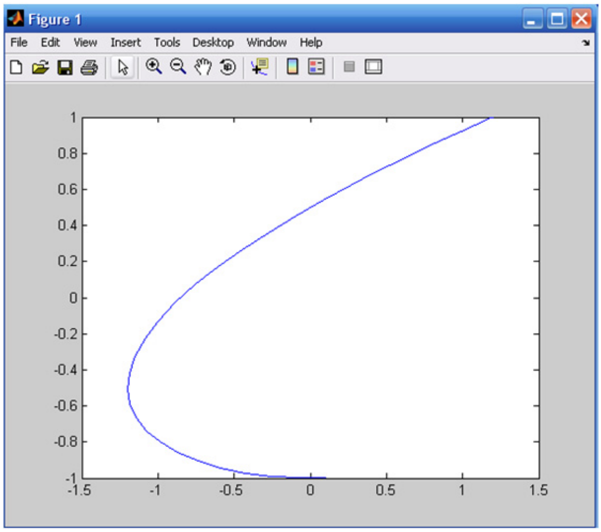
% ოპერატორი whos საშუალებას იძლევა, ნებისმიერ მომენტში მივიღოთ % ინფორმაცია ყველა აქტიური ცვლადის შესახებ.

%ყველა ცვლადი შემოყვანილი მოცემულ სეანსში რჩება აქტიური, თუ მათ

% არ წავშლით ოპერატორით clear.

>>whos

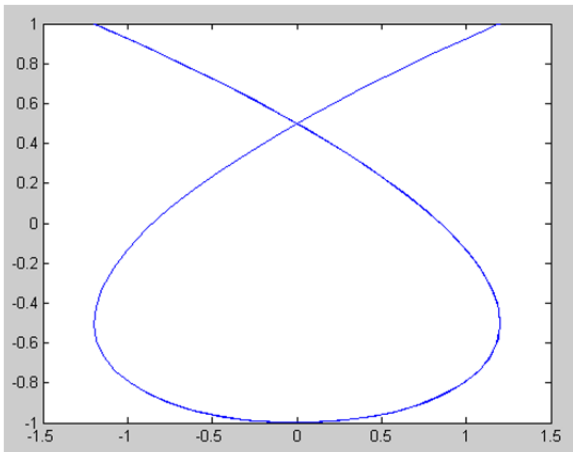
%მივიღებთ
Name Size Elements Bytes Density Complex
a1 1 by 1 1 8 Full No
a2 1 by 1 1 8 Full No
w1 1 by 1 1 8 Full No
w2 1 by 1 1 8 Full No
Grand total is 4 elements using 32 bytes
>>t=0:0.1:3.2;
%x,y ვექტორების გამოთვლა
>>x=a1*cos(w1*t);
y=a2*cos(w2*t); plot(x,y);



ნახ. 35. ლისაჟუს ფიგურა

ვხედავთ, რომ დახატულია ფიგურის მხოლოდ ნაწილი. სრული სურათის მისაღებად საკმარისია t-ცვლადის საზღვრების გაფართოება:

>>a1=1.2; a2=1.0; w1=1.5;w2=1.0;
>>t=0:0.1:10;
>>x=a1*cos(w1*t); y=a2*cos(w2*t);
plot(x,y);
მაშინ მივიღებთ შემდეგი სახის გრაფიკს:



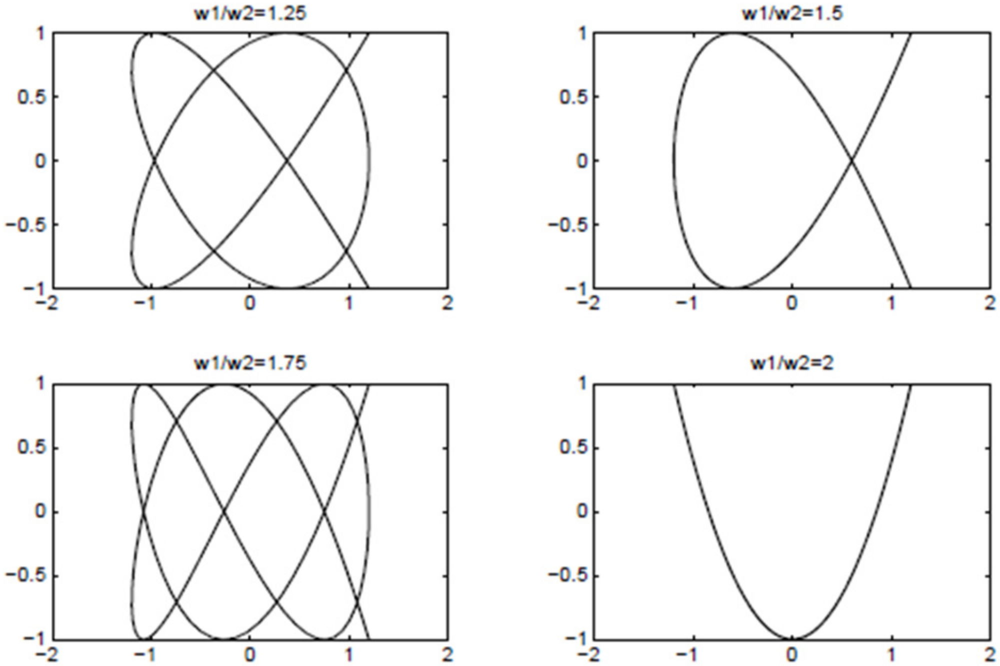
ნახ. 36. ლისაჟუს ფიგურა სრული სახით

მაგალითი 53. ლისაჟუს ფიგურების აგების მეორე ვარიანტი

ახალმოყვანილ პროგრამაში არის ციკლიური ოპერატორი for...end და ოპერატორი subplot(m,n,k), რომელიც საშუალებას იძლევა, ერთ ნახაზზე შევქმნათ მატრიცა mxn ცალკეული სურათებისაგან, ამასთან პარამეტრი k განსაზღვრავს სურათის ნომერს რიგითობის მიხედვით მარცხნიდან მარჯვნივ და ზემოდან ქვემოთ.
a1=1.2; a2=1.0; w2=1.0;
t=0:0.1:15; x=a1*cos(w2*t);

```
w1=1.25:0.25:2.0;
for k=1:4; y=a2*cos(w1(k)*t);
subplot(2,2,k); plot(x,y);
end;
```

პროგრამის გამოყენების შედეგი მოყვანილია ქვემოთ:



ნახ. 37. ერთდროულად 4-ლისაჟუს ფიგურა ერთ ნახაზზე

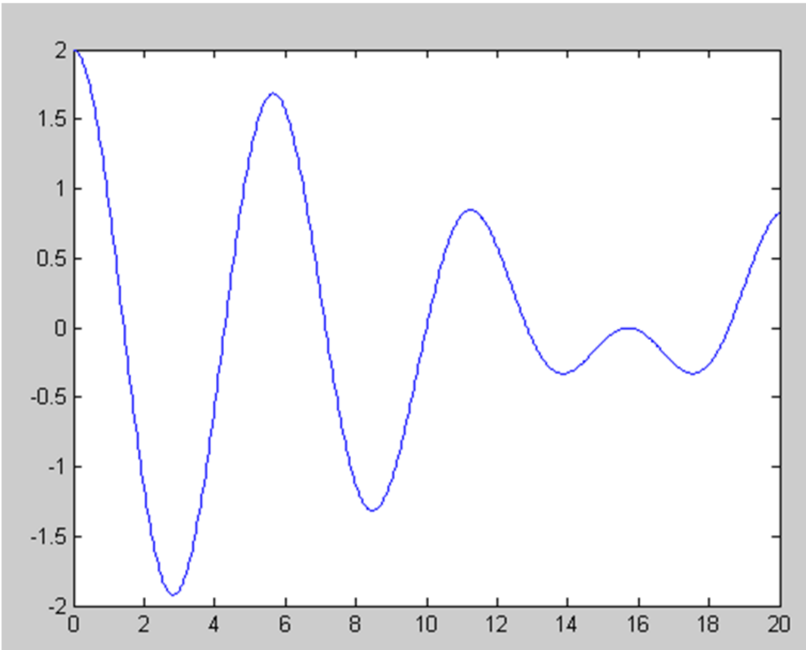
7.2. ძგერის მოვლენა

მაგალითი 54. ძგერის მოვლენა იმ შემთხვევაში გვხვდება, როცა იკრიბება ორი ჰარმონიული რხევა, რომელთა სიხშირეების სიდიდეები ახლოსაა ერთმანეთთან. შედეგად მიიღება რხევა, რომელიც შეიცავს რხევებს მოდულირებული ამპლიტუდით. მოდულაციის დაბალი სიხშირე w_1 და w_2 სიხშირეების სხვაობის ტოლია .

$$y(t) = a_1 \cos(w_1 t) + a_2 \cos(w_2 t)$$

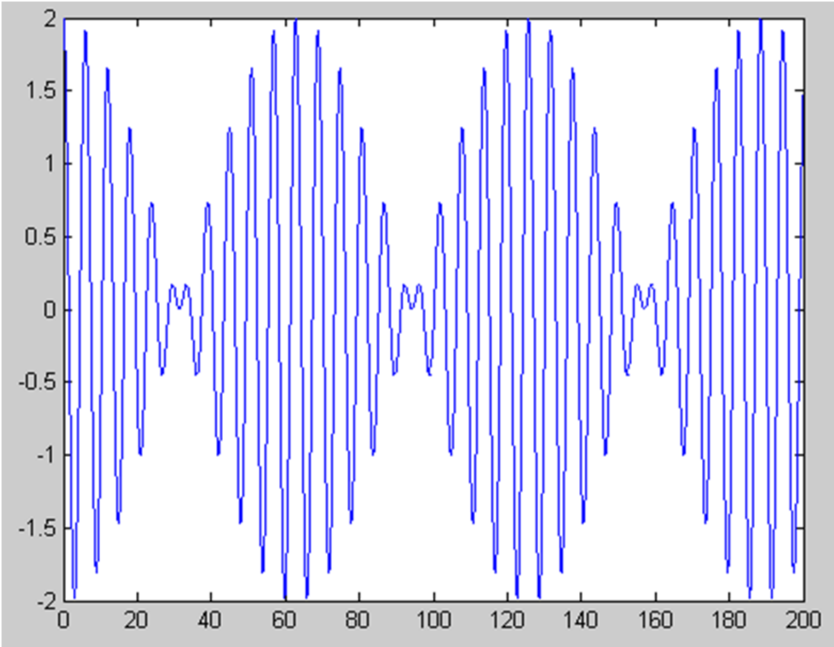
a1=1.0; % ჰარმონიული რხევების
a2=1.0; % ამპლიტუდა
w1=1.0; % ჰარმონიული რხევების
w2=1.2; % სიხშირე
t0=0; % დროის საწყისი მომენტი
tm=20; % დროის საბოლოო მომენტი
N=600; %გამოსათვლელი წერტილების რაოდენობა

T=tm-t0; % ძგერის დროის ინტერვალი
dt=T/N; % ბიჯი დროის მიხედვით
t=t0:dt:tm; % დროის ვექტორი
y=a1*cos(w1*t)+a2*cos(w2*t); % ძგერის ფუნქცია
plot(t,y); % გრაფიკის გამოტანა



ნახ. 38

მაგალითი 55. შევცვალოთ პარამეტრები:
a1=1.0; % ჰარმონიული რხევების
a2=1.0; % ამპლიტუდა
w1=1.0; % ჰარმონიული რხევების
w2=1.1; % სიხშირე
t0=0; % დროის საწყისი მომენტი
tm=200; % დროის საბოლოო მომენტი
N=6000; %გამოსათვლელი წერტილების რაოდენობა
T=tm-t0; % ძგერის დროის ინტერვალი
dt=T/N; % ბიჯი დროის მიხედვით
t=t0:dt:tm; % დროის ვექტორი
y=a1*cos(w1*t)+a2*cos(w2*t); % ძგერის ფუნქცია
plot(t,y); % გრაფიკის გამოტანა
მივიღებთ:



ნახ. 39

7.3. რხევის განტოლება

მაგალითი 56.

>>t=0:0.1:100; % დროის ვექტორის მოცემა

x=0:0.3:30; % კოორდინატის ვექტორის მოცემა

k=1.3; w=0.9; n=length(t);

% ტალღის ფორმის გამოთვლა დროის მოცემული t(1) მომენტისათვის

% ყველა x წერტილებში

y=cos(k*x-w*t(1))+cos(x-t(1));

h=line(x,y); % ტალღის გრაფიკის მომზადება და ამ წირის დესკრიპტორისათვის

% ცვლადი h-ის მინიჭება

% ობიექტის ფერის მოცემა (წირის) დესკრიპტორით h

% თვისება'color'-ის საშუალებით

set(h,'color','g');

axis([0 30 -3 3]);% კოორდინატთა ღერძების და მათი მასშტაბის არჩევა

axis manual;% წირის დესკრიპტორის შენახვა და მონაცემის შერჩევა

% '**EraseMode**'-ს თვისება,ტოლი'xor'-ის. ის მიუთითებს

% MATLAB-ის გრაფიკულ სისტემას იმას, რომ მან

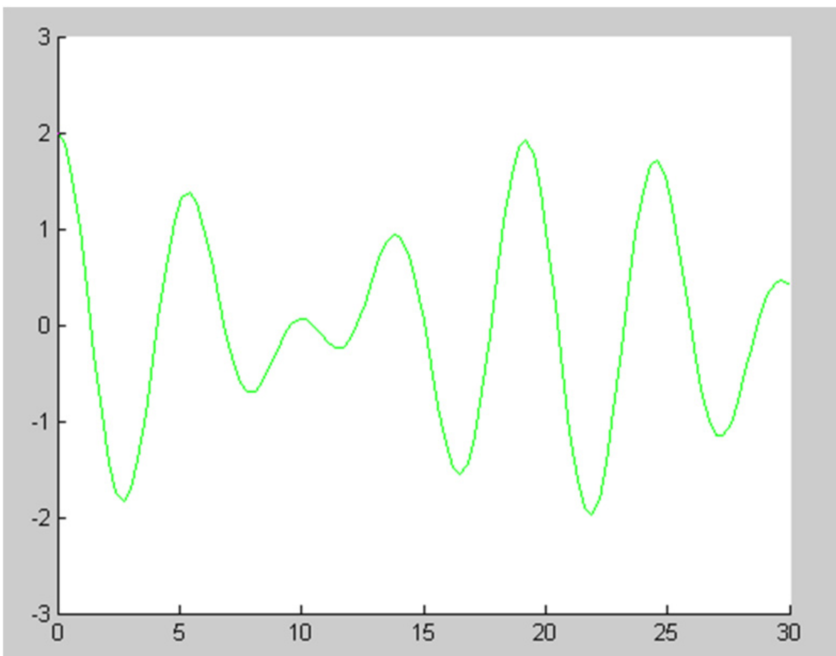
% არ გადახატოს მთელი გრაფიკი (ღერძები, ფონის ფერი

% და ის წერტილები, რომლებიც არ შეიცვალნენ), გადახატოს

% მხოლოდ ის წერტილები, რომლებმაც შეიცვალეს თავისი კოორდინატები.

set(h,'EraseMode','xor');
pause; % პაუზა ტალღის გაშვებამდე.
% ის იძლევა ბუფერში დაგროვილი გრაფიკის ეკრანზე აუცილებლად გამოტანის გარანტიას
% . შემდგომი წანაცვლება
% მიიღწევა ნებისმიერ კლავიშზე დაჭერით.
% შეიძლება გამოვიყენოთ pause (0), მაშინ კლავიშის დაჭერა საჭირო არ არის
% გამოთვლის ძირითადი ციკლი და მოძრავი ტალღის გამოყვანა
for i=2:n;
% ტალღის ფორმის გამოთვლა t(i) მომენტისათვის
y=cos(k*x-w*t(i))+cos(x-t(i));
% წირის კოორდინატების განახლება, რომელიც გამოხატავს ტალღის ამპლიტუდას
% ობიექტის(წირის)y-ის განახლების საშუალებით
% დესკრიპტორით h თვისებისა'XData'
% (x-კოორდინატის შეცვლა ახალი მნიშვნელობებით) და ანალოგიური
% მოქმედება y-კოორდინატებზე. ესაა სტანდარტული საშუალება
% ანიმაციისათვის კოორდინატული წერტილების განახლებისა.
set(h,'XData', x,'YData',y);
end;

ნებისმიერ ღილაკზე დაჭერით შეგვიძლია მივიღოთ ანიმაციური სურათი.

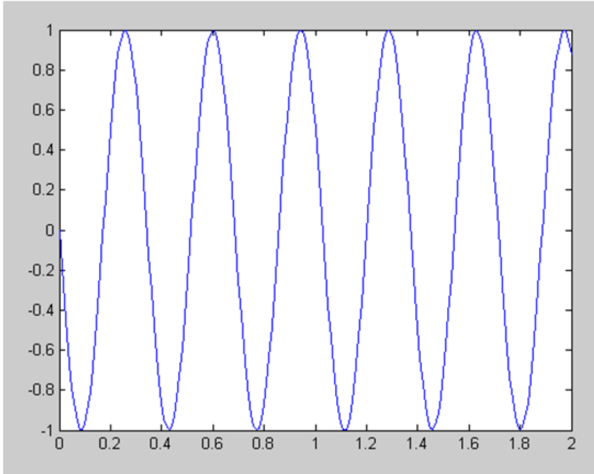


ნახ. 40. *გრაფიკის სახე დროის გარკვეული – მყისიერი მომენტისათვის*

7.4. ბგერითი ტალღა

მაგალითი 57.

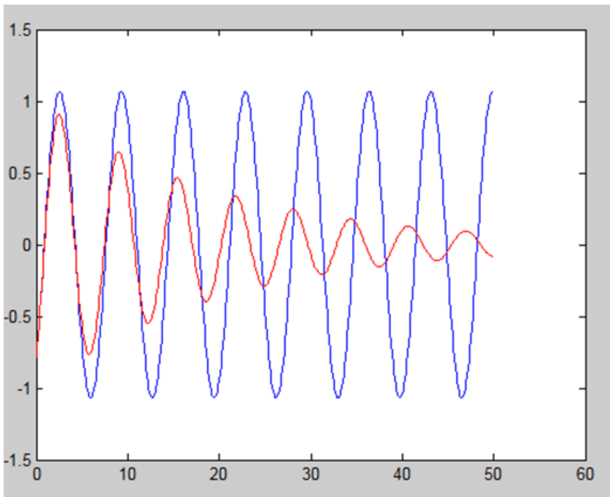
```
>>x=0:0.01:2;c=343;f=1000;
w=2*pi*f;
lambda=c/f;k=2*pi/lambda;close
all;
for t=0:1e-5:0.002;...
plot(x,sin(w*t-k*x)); end;
```



ნახ. 41

7.5. მილევადი რხევის განტოლება

მაგალითი 58.



ნახ. 42

```
clc;
clear all;
close all;
alfa=0.1;
m=10.0;
x(1)=-pi/4;
P(1)=-sin(x(1));
dt=0.1;
t(1)=0;

for i=1:500;
    t(i+1)=t(i)+dt;
    x(i+1)=x(i)+P(i)*dt;
    P(i+1)=P(i)-sin(x(i+1))*dt;
end
plot(t,x);
hold on
for i=1:500;
    t(i+1)=t(i)+dt;
    x(i+1)=x(i)+P(i)*dt;
    P(i+1)=P(i)-sin(x(i+1))*dt-alfa/m*P(i);
end
plot(t,x,'r');
```

§8. ნაწილაკის მოძრაობა ცენტრალური სიმეტრიის ველში

ნაწილაკის მოძრაობის კანონზომიერება **r**(t)მოცემულU(**r**)ველში მთლიანად აღიწერება მოძრაობის განტოლებით:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\partial U/\partial \mathbf{r} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$$

და საწყისი პირობებით **r**(0) = **r**0*,* **v**(0) = **v0**. ზოგიერთ შემთხვევაში მოცემული დიფერენციალური განტოლება შეიძლება ამოიხსნას ანალიზურად, სხვა შემთხვევებში თვისობრივად. თუმცა შედარებით რთული U(**r**) ველისათვის აუცილებელია რიცხვითი მეთოდების გამოყენება.

ფინიტური მოძრაობის ტრაექტორია

მოცემულ სამუშაოში განიხილება მოძრაობა ცენტრალური სიმეტრიის ველში. ამ შემთხვევაში ინახება იმპულსის მომენტი **M** = m[**rv**], ხოლო მოძრაობის ტრაექტორია იმყოფება ერთ სიბრტყეში, რომელიც მართობულია **M-**ვექტორის. ჩვენ ვიხილავთ იმ შემთხვევას, როცა ნაწილაკი არ ცილდება მიმზიდავ ცენტრს უსასრულო მანძილზე (ფინიტური მოძრაობა) და არ ეცემა ცენტრს. მაშინ მოძრაობის ტრაექტორია განთავსებულია ორ წრეწირს შორის $r_{min} \leq r \leq r_{max}$ და ავსებს ამ რგოლს. ამასთან, ნაწილაკი მოძრაობს ისე, რომ გადის რგოლის ნებისმიერი წერტილის მახლობლობაში ნებისმიერ მცირე მანძილზე.

ფინიტური მოძრაობა კულონურ ველში U0 = $-\alpha/r$ ცენტრალური სიმეტრიის ველში მოძრაობის ერთ-ერთი კერძო შემთხვევაა, როცა მოძრაობის ტრაექტორია ჩაკეტილია და წარმოადგენს ელიფსს ნახევარღერძებით დიდი $a = \alpha/2|E|$ და მცირე $b = \frac{M}{\sqrt{2m|E|}}$ შესაბამისად.

განტოლების ამოხსნის ერთ-ერთ მარტივ მეთოდს წარმოადგენს „ეილერის მეთოდი“, რომლის არსია ის, რომ დროის მცირე Δt „ბიჯის“ არჩევისას უშუალოდ განისაზღვრება კოორდინატისა და სიჩქარის ნაზრდი:

$$\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}\Delta t$$

$$\Delta \boldsymbol{v} = \frac{1}{m}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t))\Delta t$$

ასეთი გამოთვლების მრავალჯერადად ჩატარების შემდეგ მივიღებთ კოორდინატისა და სიჩქარის მნიშნელობების მიმდევრობას.

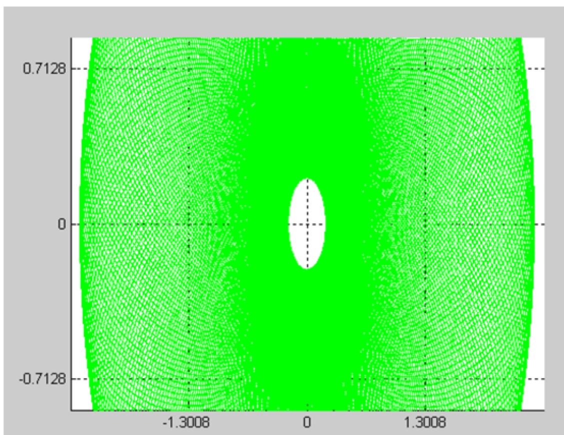
გაცილებით უფრო დიდი სიზუსტე მიიღწევა, თუ გამოვიყენებთ სქემას გადაბიჯებით:

$$\Delta \boldsymbol{v} = \frac{1}{m}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t+\Delta t))\Delta t$$

ანუ ძალის გამოთვლისას გამოიყენება კოორდინატის ახალი მნიშვნელობები დროის მომენტისათვის t+Δt. პროგრამაში **alpha** აღნიშნავსα/m-ს, ხოლო
dt= Δ*t,* v=(vx,vy),F*/m* = a =(ax,ay).

მაგალითი 59. პროგრამას პლანეტის მოძრაობის ამოცანისათვის შემდეგი სახე აქვს:

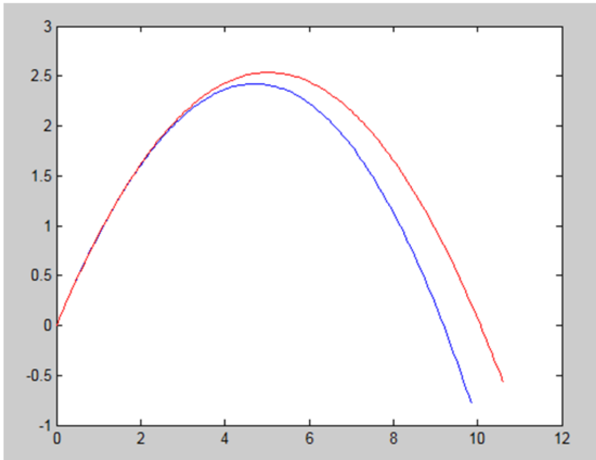
```
Alpha=1; dt=0.025;%მონაცემების მნიშვნელობები საწყის მომენტში
x1=2.5; y1=0;
vx1=0; vy1=0.25;
Emax=-1e18;
Emin=1e18;
r=sqrt(x1^2+y1^2); % მანძილი ცენტრამდე
E1=(vx1^2+vy1^2)/4 – Alpha/r; % სრული ენერგია
hl=line(x1,y1); % წირის დესკრიპტორის მოცემა
a=Alpha/(2*abs(E1)); % დიდი ნახევარღერძი
b=r*vy1/sqrt(2*abs(E1)); % მცირე ნახევარღერძი
axis([-2*a 2*a -1.2*b 1.2*b]); % მასშტაბის მოცემა
set(hl,'EraseMode','none','Color','g');
ha=gca;
set(ha,'XTick',[-a 0 a],'YTick',[-b 0 b]);% ღერძების ზომების მოცემა
grid on; % ბადის შემოტანა
pause % პაუზა, რომელიც საჭიროა აუცილებელი გამოყვანისათვის
while 1 % უსასრულო ციკლი
x2=x1+vx1*dt; % ახალი კოორდინატები
y2=y1+vy1*dt; %
r=sqrt(x2^2+y2^2); % მანძილი ცენტრამდე
A = Alpha/r^2; % აჩქარების მოდული
ax=-A*x2/r; % ვექტორის კომპონენტები
ay=-A*y2/r; % აჩქარება
vx2=vx1+ax*dt; % ახალი სიჩქარეები
vy2=vy1+ay*dt; %
E2=((vx2+vx1)^2+(vy2+vy1)^2)/8 -Alpha/r; % სრული ენერგია
if E2> Emax % ცვლილების
საზღვარი
Emax=E2; % სრული ენერგია
end;
if E2< Emin
Emin=E2;
end;
% მონაცემების განახლება
გრაფიკზე
set(hl,'XData',[x1 x2],'YData',[y1 y2]);
% გადამისამართება
x1=x2;
y1=y2;
```



ნახ. 43. ანიმაციური სურათის ფრაგმენტი

```
vx1=vx2;
vy1=vy2;
end;%ციკლის while 1-ის დამთავრება
```

მაგალითი 60.



ნახ. 44. კუთხით გასროლილი სხეულის მოძრაობა

```
>>clc
clear all
v0=10;
m=1;
g=10;
dt=0.01;
alfa=0.1;
teta=45*pi/180;
x(1)=0;
y(1)=0;
vx=v0*cos(teta);
vy=v0*sin(teta);
for i=1:150
    x(i+1)=x(i)+vx*dt;
    ax=alfa/m*vx;
    vx=vx-ax*dt;
    y(i+1)=y(i)+vy*dt;
    ay=-g-alfa/m*vy;
    vy=vy+ay*dt;
end
plot(x,y);

x1(1)=0;
y1(1)=0;
v1x=v0*cos(teta);
v1y=v0*sin(teta);
for i=1:150
    x1(i+1)=x1(i)+v1x*dt;
    y1(i+1)=y1(i)+v1y*dt;
    v1y=v1y-g*dt;
end
hold on
plot(x1,y1,'r');
```

§9. დიფუზიის მოვლენა(ქაოსური მოძრაობა)

ბროუნის ნაწილაკების მოძრაობის თეორია შექმნა ა. აინშტაინმა(1905-1906წწ.)

დავუშვათ, რომ დროის საწყის მომენტში N ნაწილაკი ლოკალიზებულია y ღერძზე. დროის შემდგომ მომენტებში ნაწილაკები წაინაცვლებენ x-ღერძის გასწვრივ Δx თანამიმდევარი ბიჯით. ცალკეული ნაწილაკის თითოეული ბიჯი აირჩევა შემთხვევით და არაა დამოკიდებული სხვა ბიჯებზე. თუმცა ალბათობის განაწილება ნებისმიერი ბიჯის არჩევისას ერთიდაიგივეა. ჩავთვალოთ, რომ

წანაცვლება ურთიერთსაწინააღმდეგო მიმართულებებით თანაბარალბათურია. ეს ნიშნავს, რომ წანაცვლების საშუალო მნიშვნელობა

$$<\Delta x>= 0. \qquad (1)$$

ნაწილაკის $<\Delta x>_{დ}$ წანაცვლების «დაკვირვებადი საშუალო» მცირეა, მაგრამ არაა ნულის ტოლი. თითოეული ბიჯის შემდეგ ნაწილაკები შორდებიან y ღერძს. აღვნიშნოთ $x(k)$ რომელიმე ნაწილაკის კოორდინატი k ბიჯის შემდეგ. მაშინ

$$x(k + 1) = x(k) +\Delta x. \qquad (2)$$

გავასაშუალოთ ეს გამოსახულება ნაწილაკების სიმრავლის მიხედვით. მაშინ მივიღებთ:

$$<x(k + 1)>= <x(k)>,$$

ანუ საშუალო მნიშვნელობა $<x(k)>$ ბიჯიდან ბიჯამდე არ იცვლება და ტოლია $<x(0)> = 0$. დაკვირვებადი საშუალო სიდიდე $<\Delta x>$ და ნაწილაკთა დიდი რიცხვისათვის

$$< x(k) >= \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} x_j\,(k).$$

ზოლის სიგანე, რომელშიც განაწილდებიან ნაწილაკები k-ბიჯის შემდეგ, მოსახერხებელია დავახასიათოთ $<x^2\,(k)>$ სიდიდით.

$$< x^2(k+1) >=<\ x^2(k) > +2 < x(k)\Delta x > +< (\Delta x^2 >$$

რადგან $x(k)$ და Δx არ არიან ერთმანეთზე დამოკიდებული, გვექნება:

$$<x(k)\Delta x>= <x(k)><\Delta x>= 0.$$

აღვნიშნოთ$<(\Delta x)^2>= a^2$.

$$<x^2\,(k+ 1)>= <x^2\,(k)>+ a^2,$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ კოორდინატის საშუალო კვადრატი თითოეულ ბიჯზე იზრდება სიდიდითa^2. ანუ,

$$<x^2\,(k)>= ka^2.\ (5)$$

დაკვირვებადი სიდიდე

$$< x^2 >= \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} {x_j}^2$$

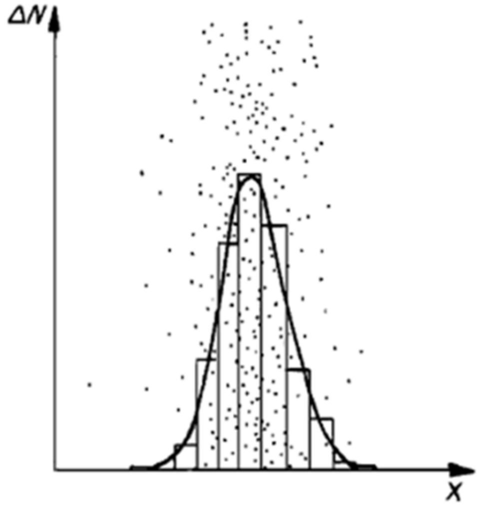
მიახლოებით იცვლება ბიჯების რიცხვის პროპორციულად. ნაწილაკების განაწილება აღიწერება განაწილების ფუნქციით *f*(*x*), რომელიც განსაზღვრავს ნაწილაკთა კონცენტრაციას;

dW = *f*(*x*)*dx* – ალბათობაა იმისა, რომ *j*- ნაწილაკის კოორდინატა *k*-ბიჯის შემდეგ მოხვდება ინტერვალში$x \le x_j \le x + dx$. ქაოსური-შემთხვევითი „ხეტიალის" თეორია *k* ბიჯების საკმაოდ დიდი რიცხვისათვის გვაძლევს გაუსის განაწილებას:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi k a^2}} exp\left(-\frac{x^2}{2ka^2}\right)$$

დათვლის შედეგი შეიძლება წარმოვადგინოთ ჰისტოგრამის საშუალებით (იხ. ნახ. 45).

მივაქციოთ ყურადღება (5) თანაფარდობას. თუკი ბიჯების ზომას გავზრდით დროის მიხედვით l-ჯერ, მაშინ საშუალო კვადრატული წანაცვლება ერთი ბიჯის შემთხვევაში a^2(5)-დან გამომდინარე $\widetilde{a^2}$ უნდა შეიცვალოს $l\widetilde{a^2}$ -ით, ხოლო ბიჯების რიცხვი $\tilde{k} - \tilde{k}/l$ -ით. შედეგად, $\widetilde{x^2} = l\widetilde{a^2} \cdot \tilde{k}/l = \widetilde{a^2}\,\tilde{k}$, ანუ (5) თანაფარდობა არაა დამოკიდებული ბიჯის ზომაზე.



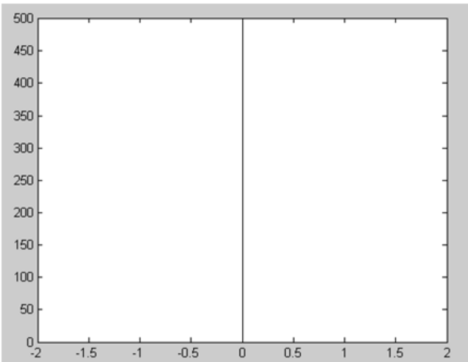
ნახ. 45. ნაწილაკების განაწილება დიფუზიისას (ჰისტოგრამა და თეორიული მრუდი)

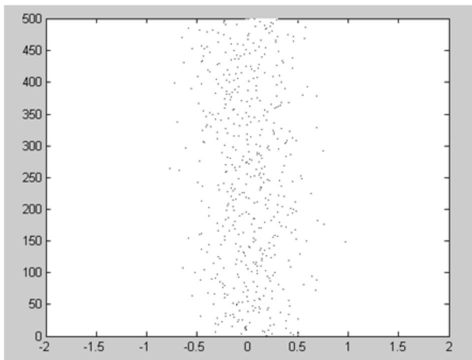
მაგალითი 61. % დიფუზიის ამოცანა %

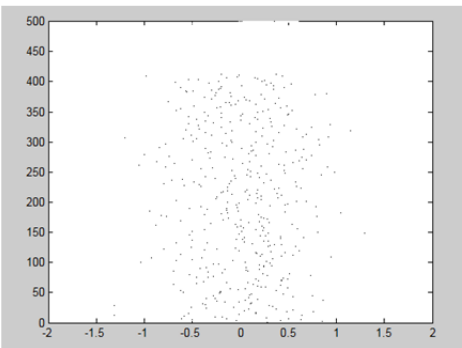
```
n =500; % ნაწილაკთა რიცხვი
dh =.02; % შემთხვევითი განაწილების პარამეტრი
% ვექტორ-სვეტის მოცემა წერტილების კოორდინატებისათვის
y =1:n;
y=y'; x =zeros(size(y));
h=plot(x,y, 'k.'); % წერტილების საწყისი მდგომარეობის მოცემა
axis([-2 2 0 n+1 ]); % ღერძების მოცემა
% გადახატვის რეჟიმის განსაზღვრა და წერტილების ზომა
set(h,'EraseMode','background','MarkerSize',3);
```

```
pause % პაუზა გრაფიკის ეკრანზე გამოსაყვანად
i=0; % საწყისი მნიშვნელობა
while 1 % უსასრულო ციკლი
i=i+1;
x=x+dh*(2*rand(n,1)-1); % თითოეული წერტილის x-კოორდინატის შემთხვევითი
%წანაცვლება
% ნახატზე წერტილების კოორდინატების შეცვლა
set(h,'XData',x,'YData',y,'Color','k')
end;
```

ქვემოთ მოყვანილია დიფუზიის შედეგი დროის სხვადასხვა მომენტისათვის. პირველი სურათი შეესაბამება საწყის მომენტს. როგორც კი დავაჭერთ enter-ს, დაიწყება დიფუზიის პროცესი (ანიმაციური სურათი).







ნახ. 46. დიფუზიის შედეგი დროის სხვადასხვა მომენტში

§10. ფურიე ანალიზი

10.1. მზის აქტივობის ციკლი

მაგალითი 62.%% ფურიეს ანალიზი – FFT MATLAB(R)-ში

% ეს მაგალითი გვიჩვენებს, როგორ უნდა გამოვიყენოთ FFT ფუნქცია მზის ლაქების ვარიატიების ანალიზისათვის.

% შედეგების ანალიზისათვის გამოყენებულია მზის აქტივობის მონაცემები უკანასკნელი 300 წლის პერიოდში.

%
% Copyright 1984-2007 The MathWorks, Inc.
% $Revision: 5.14.4.6 $ $Date: 2007/12/14 14:51:43 $

%%
% მზის აქტივობა წარმოადგენს ციკლიურ პროცესს, რომლის პერიოდი 11 წელია.
% უნდა აღინიშნოს, რომ ამ ამოცანაში მოყვანილია მასალები – მონაცემები, რომელთაც ციურიხის მზის ლაქები ეწოდებათ.
% მოცემულია გაზომვების შედეგები მზის ლაქების რიცხვისა და ზომის ფარდობითი რიცხვისათვის.
% ასტრონომებს აქვთ ეს რიცხვები ტაბულირებული სახით თითქმის უკანასკნელი 300 წლის პერიოდისათვის.

```
load sunspot.dat
year=sunspot(:,1);
relNums=sunspot(:,2);
plot(year,relNums)
title('Sunspot Data')
```

%%
% Here is a closer look at the first 50 years.

```
plot(year(1:50),relNums(1:50),'b.-');
```

%%
% The fundamental tool of signal processing is the FFT, or fast Finite Fourier
% Transform. To take the FFT of the sunspot data type the following.
%
% The first component of Y, Y(1), is simply the sum of the data, and can be
% removed.

```
Y = fft(relNums);
Y(1)=[];
```

%%
% A graph of the distribution of the Fourier coefficients (given by Y) in the
% complex plane is pretty, but difficult to interpret. We need a more useful way
% of examining the data in Y.

```
plot(Y,'ro')
title('Fourier Coefficients in the Complex Plane');
xlabel('Real Axis');
ylabel('Imaginary Axis');
```

%%
% The complex magnitude squared of Y is called the power, and a plot of power
% versus frequency is a "periodogram".

```
n=length(Y);
power = abs(Y(1:floor(n/2))).^2;
nyquist = 1/2;
freq = (1:n/2)/(n/2)*nyquist;
plot(freq,power)
xlabel('cycles/year')
title('Periodogram')
```

```
%%
% The scale in cycles/year is somewhat inconvenient. We can plot in years/cycle
% and estimate the length of one cycle.
```

```
plot(freq(1:40),power(1:40))
xlabel('cycles/year')
```

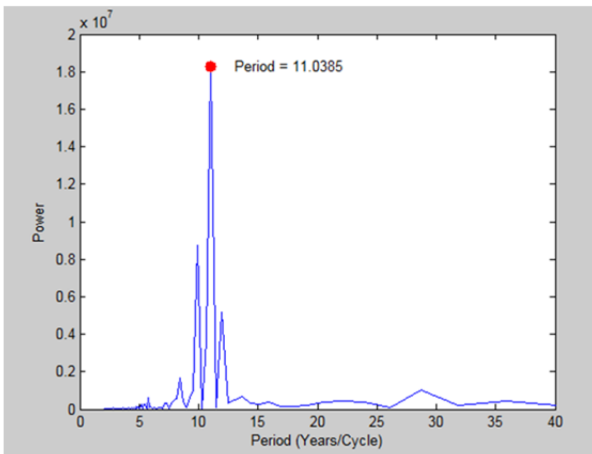
```
%%
% Now we plot power versus period for convenience (where period=1./freq). As
% expected, there is a very prominent cycle with a length of about 11 years.
```

```
period=1./freq;
plot(period,power);
axis([0 40 0 2e+7]);
ylabel('Power');
xlabel('Period (Years/Cycle)');
```

```
%%
% Finally, we can fix the cycle length a little more precisely by picking out
% the strongest frequency. The red dot locates this point.
```

```
hold on;
index=find(power==max(power));
mainPeriodStr=num2str(period(ind
ex));
plot(period(index),power(index),'r.',
'MarkerSize',25);
text(period(index)+2,power(index),
['Period = ',mainPeriodStr]);
hold off;
```

```
displayEndOfDemoMessage(mfile
name)
```



ნახ. 47

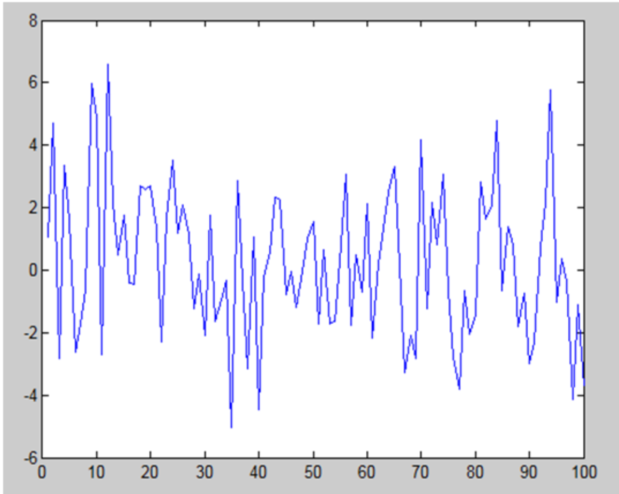
10.2. ერთგანზომილებიანი სწრაფი ფურიე გარდაქმნა

Fast Fourier Transform (FFT) საშუალებას იძლევა, მნიშვნელოვნად შევამციროთ მათემატიკური ოპერაციები. ამისათვის გამოიყენება ფუნქცია.

ფურიეს გარდაქმნის საილუსტრაციოდ, შევქმნათ სამსიხშირიანი სიგნალი ძლიერი ხმაურის ფონზე, რომელიც იქმნება შემთხვევითი რიცხვების გენერატორის საშუალებით:

მაგალითი 63.

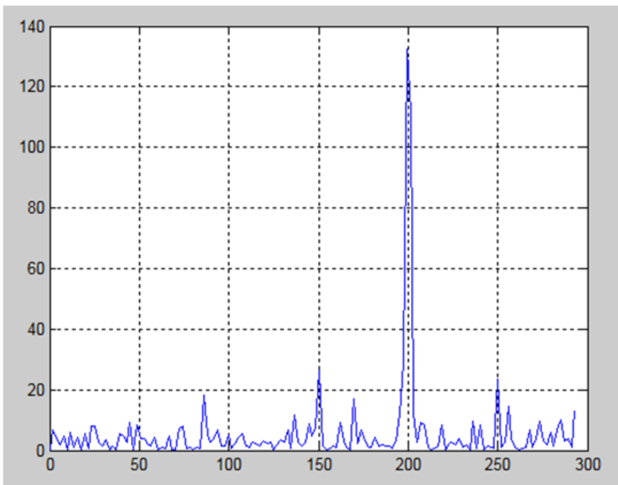
```
>>t=0:0.0005:1;
x=sin(2*pi*200*t)+.4*sin(2*pi*150*t)+.4*sin(2*pi*250*t);
y=x+2*randn(size(t));
plot(y(1:100),'b')
```



***ნახ. 48.** სიგნალი, რომელსაც ემატება ხმაური*

მაგალითი 64. ამ ამოცანის გადასაწყვეტად შევქმნათ სკრიპტ ფაილი:

```
t=0:0.0005:1;
x=sin(2*pi*200*t)+.4*sin(2*pi*150*t)+.4*sin(2*pi*250*t);
y=x+2*randn(size(t));
plot(y(1:100),'b')
Y=fft(y,1024);
Pyy=Y.*conj(Y)/1024;
f=2000*(0:150)/1024;
plot(f,Pyy(1:151)),grid
%დავაჭიროთ F5-ს, მაშინ მივიღებთ სიგნალს ხმაურის გარეშე:
```



ნახ. 49

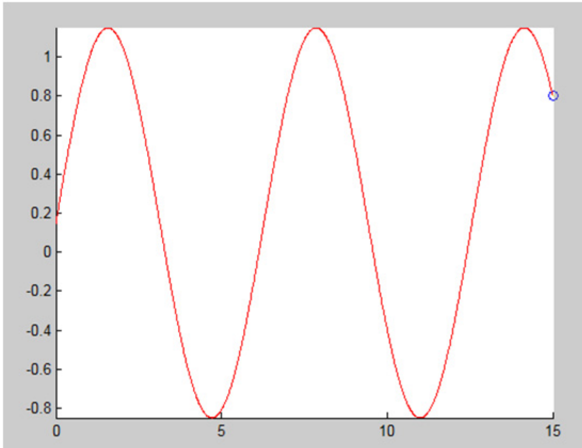
ახლა ავაგოთ სპექტრალური სიმკვრივის გრაფიკი ფურიეს პირდაპირი გარდაქმნის გამოყენებით. ეს გრაფიკი აგებულია 300ჰც სიხშირის მახლობლობაში.

§11. ანიმაციური გრაფიკა

ბრძანება comet გამოსახავს წერტილის („კომეტის“) მოძრაობას (x,y(x)) წირის გასწვრივ. მოვიყვანოთ მაგალითი:

მაგალითი 65.

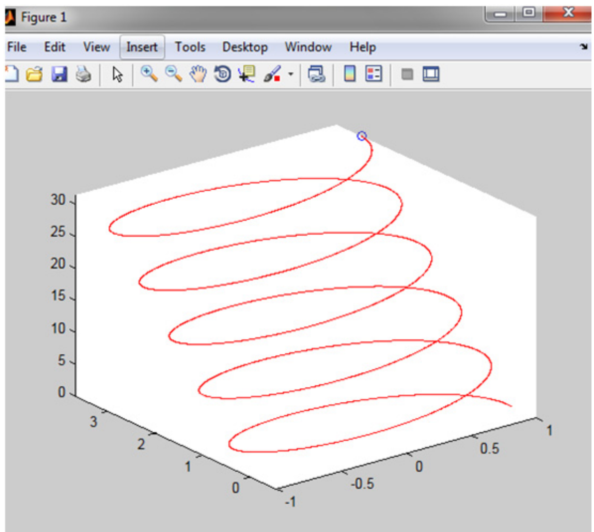
X=0:0.01:15; comet(X,sin(X)+0.15). enter-ის დაჭერის შემდეგ მივიღებთ:



ნახ. 50

მაგალითი 66.

ბრძანება comet3(Z) გამოსახავს წერტილის მოძრაობას სივრცეში მაგალითი: W=0:pi/500:10*pi; comet3(cos(W),sin(W)+W/10,W), მივიღებთ:



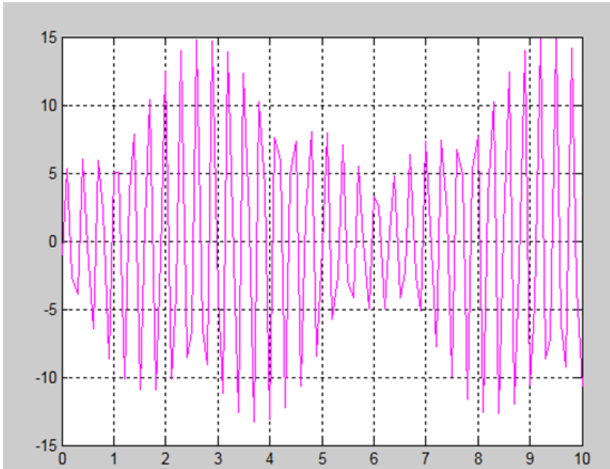
ნახ. 51

მაგალითი 67. ძგერის ანიმაციური სურათი:

```
clc
clear all

alfa0=1;%Angle in degree
a1=10; a2=5;
k1=20; k2=21;
```

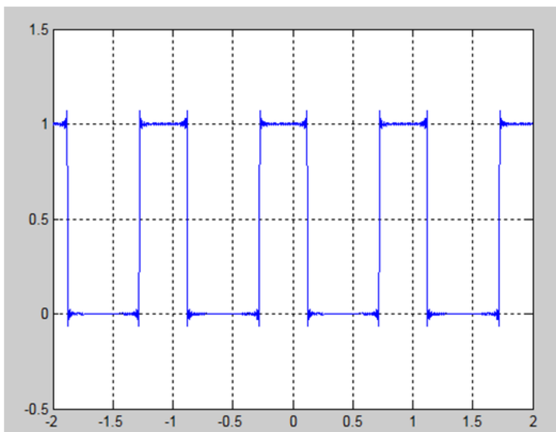
```
w1=1; w2=100;
w=1;
alfa0=pi/180*alfa0;
x=0:0.1:10;
time=10;
for i=0:0.1:time
%t=0:0.1:i;
t=i;
y=a1*cos(k1*x-
w1*t)+a2*cos(k2*x-w2*t);
plot(x,y,'m','MarkerSize',20);
%set(MarkerSize=10)
axis([-0 10 -15 15]);
grid on
pause(1.0/10)
drawnow
%i=i+1;
end
```



*ნახ. **52.** ძგერის ანიმაციური სურათი დროის მყისიერ მომენტში*

მაგალითი 68. მართკუთხა სიგნალების ანიმაციური სურათი:

```
clc
clear all
A=1; % ამპლიტუდა
tao=0.4; %იმპულსის სიგანე
T=1; %პერიოდი
q=T/tao; %იმპულსების ციკლი
N=100; % number for Fourier sum
xstart=-2;
xend=2;
ystart=-0.5;
yend=1.5;
x=xstart:0.001*(xend-xstart):xend;
M = length(x);
w = 10;
time = 10;
for t=1:0.04:time
for j=1:M;
    y(j)=A/q;
for k=1:N;
    y(j) = y(j)+2*A/(pi*k)*sin(pi*k/q)*cos(2*pi*k*x(j)/T-2*pi*k*t);
end
```

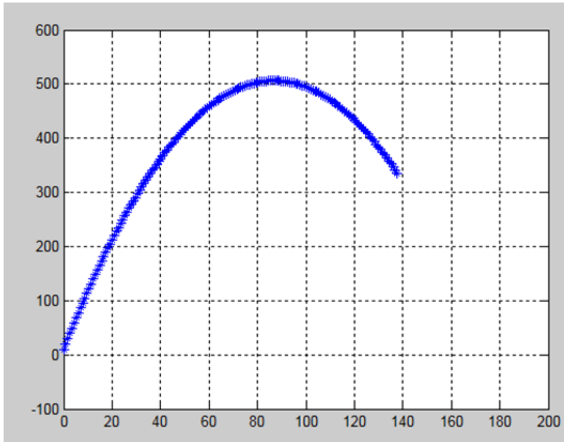


*ნახ. **53.** მართკუთხა სიგნალების ანიმაციური სურათი დროის მყისიერ მომენტში*

```
end
    plot(x,y);
    grid on;
    axis([ xstart xend ystart yend ])
    pause(1/25);
end
```

მაგალითი 69. კუთხით გასროლილი სხეულის ანიმაციური სურათის აგება:

```
clc
clear all
v=60;%Initial velocity
% alfa=45;%Angle in dgree
% alfa=pi/180*alfa;
% vx=v*cos(alfa);
% vy=v*sin(alfa);
%time=5+2*v*sin(alfa)/10;
% for i=0:0.1:time
% t=0:0.1:i;
% x=vx*t;
% y=0+vy*t-10*t.^2/2;
alfa=85*pi/180;
v=100;
for i=0:0.1:20;
    t=0:0.1:i
    x=v*cos(alfa)*t;
    y=10+v*sin(alfa)*t-5*t.^2;
    plot(x,y,'*');
    grid on
axis([0 200 -100 600]);
pause(1.0/5)
end
drawnow
% end
```



ნახ. 54. კუთხით გასროლილი სხეულის ტრაექტორია დროის მყისიერ მომენტში

§12. არაწრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა

მაგალითი 70.

განვიხილოთ შემდეგ განტოლებათა სისიტემა:

$$\cos x+y^2+2\ln z=10$$
$$7x+2^y-z^{-4}+3=0$$
$$x+y+z=7$$

ეს სისტემა უნდა მივიყვანოთ ისეთ სახემდე,რომ მარჯვენა მხარეში ნულები (0) იყოს.

$$\cos x+y^2+2\ln z-10=0$$
$$7x+2^y-z^{-4}+3=0$$
$$x+y+z-7=0$$

```
%შევქმნათ m-ფაილფუნქცია
function q=sfun(p)
x=p(1); y=p(2); z=p(3); q=zeros(3,1);
q(1)=cos(x)+y^2+2*log(z)-10;
q(2)=7*x+2^y-z^(-4)+3;
q(3)=x+y+z-7;
```

სისტემის ამოხსნისათვის საჭიროა, ბრძანებათა ველში ჩავწეროთ

```
x=fsolve('sfun',[1 1 1])% დავაჭიროთ enter-ს, მივიღებთ:
x =
    3.0163    3.5755    0.4081
```

თავი III

დიფერენციალური განტოლებების ამოხსნა MATLAB-ის გარემოში

§1. წრფივი და არაწრფივი დიფგანტოლებების ამოხსნა dsolve გამოყენებით

მაგალითი 71.

მოვიყვანოთ მარტივი დიფგანტოლების ამოხსნის მაგალითი:

$$\frac{dy}{dt} = -2ty$$

საწყისი პირობით y(0)=1. ამ განტოლებას ანალიზური ამონახსნი აქვს:

$$y(t) = e^{-t^2}$$

ანალიზური ამონახსნი მიიღება, თუ ბრძანების ველში ჩავწერთ:
>> dsolve('Dy=-2*t*y','y(0)=1') %. დავაჭიროთ enter-ს და მივიღებთ:
ans =
    1/exp(t^2)

მაგალითი 72.

ამოვხსნათ შემდეგი დიფგანტოლება

$(y')^2 + y^2 = 1, y(0) = 0.$

```
>> y=dsolve('(Dy)^2+y^2=1','y(0)=0')
y =
  sin(t)
  -sin(t)
```

მაგალითი 73. ვთქვათ, ამოვხსნათ მეორე რიგის წრფივი დიფგანტოლება:

$$\ddot{y} + a^2 y = 0.$$

ბრძანების სტრიქონში ჩაიწერება:
>>y=dsolve('D2y+a^2*y=0')

MATLAB-ი გვაძლევს პასუხს: y=C1*sin(a*t)+C2*cos(a*t). ეს ნიშნავს იმას, რომ ზოგადი ამონახსნის სახეა:

$$y=C_1\sin(at)+C_2\cos(at).$$

თუ ავირჩევთ საწყის პირობას: y_0=2, $\dot{y}_0 = a$, მივიღებთ კოშის ამოცანას. ამ ამოცანის ამოხსნისათვის ბრძანებათა ველში ავკრიფოთ:
>>y=dsolve('D2y+a^2*y=0,y(0)=2,Dy(0)=a'). მივიღებთ პასუხს: y = sin(a*t)+2*cos(a*t).

მაგალითი 74.

ანალოგიურად, dsolve გამოიყენება წრფივ დიფგანტოლებათა სისტემის ამოხს-ნისათვის:

$$\dot{u} = 2v\,, \dot{v} \ = 2w, \dot{w} \ = \ -2u$$

საწყისი პირობით u_0=0, v_0=0, w_0=3. ამოხსნისათვის ბრძანებათა ველში ავკრიფოთ:

>>S=dsolve('Du=2*v, Dv=2*w, Dw=-2*u','u(0)=0, v(0)=0, w(0)=3')
MATLAB-ის პასუხია ამონახსნის სტრუქტურის შესახებ:
S = u:[1x1 sym] v: [1x1 sym] w: [1x1 sym].

იმისათვის, რომ შევიდეთ S-ის სტრუქტურაში, უნდა ავკრიფოთ:

>>u = S.u, v = S.v, w = S.w

შედეგად მივიღებთ:

u=exp(-2*t)+3^(1/2)*exp(t)*sin(3^(1/2)*t)-exp(t)*cos(3^(1/2)*t)
v =-exp(-2*t)+3^(1/2)*exp(t)*sin(3^(1/2)*t)+exp(t)*cos(3^(1/2)*t)
w =exp(-2*t)+2*exp(t)*cos(3^(1/2)*t).

ამოვხსნათ იგივე სისტემა სხვა სასაზღვრო პირობისათვის: u(0)=1, v(0)=-1, w(1)=e^{-2}
>> S=dsolve('Du=2*v, Dv=2*w, Dw=-2*u', 'u(0)=1, v(0)=-1, w(1)=exp(-2)');
>>u = S.u, v = S.v, w = S.w

მივიღებთ პასუხს: u =exp(-2*t), v =-exp(-2*t), w =exp(-2*t).

იგივე შედეგის მისაღებად ბრძანების ერთ სტრიქონში უნდა ჩაიწეროს:
>> S=dsolve('Du=2*v, Dv=2*w, Dw=-2*u', 'u(0)=1, v(0)=-1, w(1)=exp(-2)'); u = S.u, v = S.v, w = S.w

მაგალითი 75.

ამოვხსნათ უმარტივესი დიფერენციალური განტოლება $y''(t) = -g$, რომელიც აღწერს სხეულის თავისუფალ ვარდნას გრავიტაციულ ველში, სადაც g = 9,8მ/წმ^2 . ვთქვათ, მაღლა ასროლილი სხეულის ფრენის სიმაღლეა *y*1=y, ხოლო სიჩქარე – *y*2=y*'*. საწყისი პირობა მოიცემა შემდეგნაირად: *y*0=[0;10], რაც ნიშნავს იმას, რომ საწყისი სიმაღლე 0-ია, ხოლო სიჩქარე 10მ/წმ. შევადგინოთ მარტივი სკრიპტფაილი და დავარქვათ m-ფაილს demoode:

y0=[0; 10]; % საწყისი პირობების მოცემა ვექტორისათვის
ts=0:.2:2; % დროის ცვლილების არე
dydt=@(t,y)[y(2);-9.8]; % ანონიმური ფუნქციის შექმნა ODE-ს მარჯვენა მხარისათვის
[to,yo]=ode45(dydt,ts,y0)

მონაცემები მოცემულია ცხრილის სახით:

to =

0
0.2000
0.4000
0.6000
0.8000
1.0000
1.2000
1.4000
1.6000
1.8000
2.0000

yo = 0 10.0000
1.8040 8.0400
3.2160 6.0800
4.2360 4.1200
4.8640 2.1600
5.1000 0.2000
4.9440 -1.7600
4.3960 -3.7200
3.4560 -5.6800
2.1240 -7.6400
0.4000 -9.6000

ეს განტოლება შეიძლება ამოვხსნათ ანალიზური სახითაც dsolve ბრძანების გამოყენებით:

```
y=dsolve('D2y+g=0,y(0)=0,Dy(0)=10')
%მიიღება:
y = 10*t – (g*t^2)/2
```

§2. არაწრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა ამოხსნა ode 23 და ode 45 -ის გამოყენებით

MATLAB-ში გათვალისწინებულია არაწრფივი დიფგანტოლებების ამოხსნა რიცხვითი მეთოდებით **ode23** და **ode45** ბრძანებების გამოყენებით. **ode** სიტყვა ნიშნავს *Ordinary Differential Equation-ს.* ციფრები ნიშნავს რუნგე-კუტას მეთოდით ჩატარებული გამოთვლების (სიზუსტეს) რიგს. **ode45** გვაძლევს უფრო ზუსტ ამონახსნს, მაგრამ მოითხოვს უფრო მეტ მანქანურ დროს. **ode23-**ის ბრძანების ძირითადი მოდიფიკაციის სახეა:

[t, X] = ode23('fun', [T0 T1], X0). ის იძლევა საშუალებას, დიფგანტოლებათა სისტემა ამოიხსნას იმ შემთხვევაში, როცა ის ჩაწერილია კოშის ფორმით.

$$X = F(\dot{X}, t), X(T_0) = X_0$$

დროითი ინტერვალისათვის $T_0 \leq t \leq T_1$.

გამოთვლის შედეგი აისახება *t* დრის ანათვალისა და მისი შესაბამისი *X* მონაცემის სიდიდის მასივების სახით. იმისათვის, რომ ბრძანება შესრულდეს, წინასწარ უნდა შევადგინოთ პროგრამა *F*(*X*,*t*) ვექტორ-ფუნქციის გამოსათვლელად, რომელიც დგას დიფგანტოლების მარჯვენა მხარეს. ეს პროგრამა უნდა გაფორმდეს *m*-ფაილის სახით, რომელსაც მიენიჭება სახელი, მაგალითად 'fun'.

მაგალითი 76. ვისარგებლოთ ბრძანება **ode23-**ით არაწრფივი განტოლების მოდელირებისათვის:

$$\ddot{y} + siny = 0.8y^3, y(0) = 1, \dot{y}(0) = 0$$

გადავწეროთ ეს განტოლება ორგანტოლებიანი სისტემის სახით. ამისათვის შემოვიღოთ აღნიშვნები: $x_1 = y, x_2 = \dot{y}$:

$$\dot{x_1} = x_2$$
$$\dot{x_2} = 0.8{x_1}^3 - sin\, x_1 \;,\; X_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ფუნქცია მარჯვენა მხარის გამოსათვლელად გავაფორმოთ *m* ფაილის სახით, რომლის სახელიც იქნება **fun**:

```
function F = fun (t, X)
F=zeros(2,1); % სვეტი ვექტორი
F(1)=X(2);
F(2)=0.8*X(1)^3-sin(X(1));
```

ამის შემდეგ პარამეტრებს მივანიჭებთ რიცხვით მნიშვნელობებს:

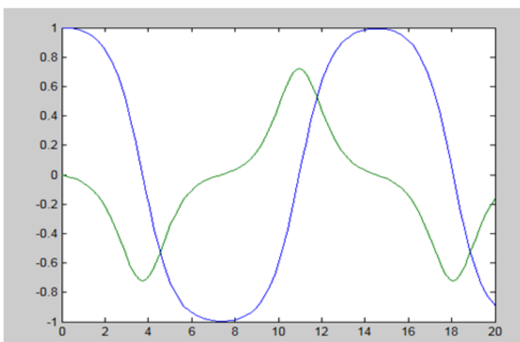
>>t0 = 0, t1 = 20, X0 = [1; 0], % რის შემდეგაც შეიძლება შესრულდეს ძირითადი ბრძანება:

[t, X] = ode23('fun', [t0 t1], X0)

ამოხსნის შედეგი იქნება 0-20 წმ ინტერვალში *t* დროის ერთსვეტიანი მასივი და ორსვეტიანი მასივი X, რომელიც შეიცავს $x_1(t)$, $x_2(t)$ მონაცემებს. როგორც წესი, დროითი ბიჯი ცვლადია. შედეგის გრაფიკულად წარმოდგენისათვის საჭიროა ბრძანების plot(t, X)-ის გამოყენება.

>>plot(t,X)

% მივიღებთ:



ნახ. 55

თავი IV

ეკოლოგიური ამოცანები „MATLAB“-ის გარემოში

§1. ლოჯისტიკური დიფერენციალური განტოლება

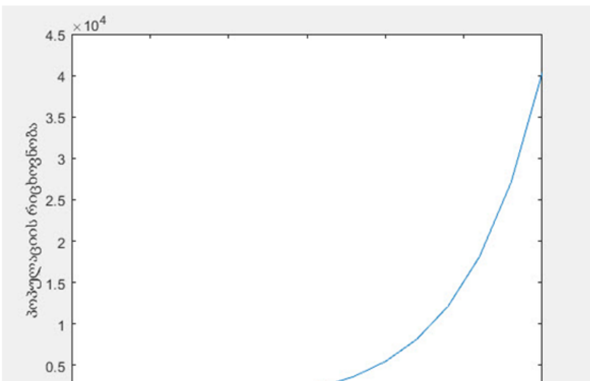
მაგალითი 77. განვიხილოთ პოპულაციის ექსპონენციალური ზრდის კანონი, რომელიც მიიღება მალთუსის განტოლებიდან:

$$\frac{dN}{dt} = rN.$$

ამ განტოლების ამონახსნი ტოლია:

$$N_t = N_0 e^{rt}.$$

ავაგოთ ამ გამოსახულების გრაფიკი, როცა მაგალითში გამოყენებული პარამეტრების მნიშვნელობებია: $N_0 = 100$ (პოულაციის ზომა $t = 0$ მომენტში) და r = 2
შევქმნათ m-ფაილი
n0=100; %პოპულაციის ზომა დროის საწყის მომენტში $t = 0$,
r=2; %გამრავლების კოეფიციენტი
t=0:0.2:3; %დროის ინტერვალი (წლებში)
nt=n0*exp(r.*t);% ექსპონენციალური ზრდის განტოლება
figure % გრაფიკის ახალი ფანჯრის გახსნა
plot(t,nt)% გრაფიკის აგება
დავაჭიროთ F5-ს და მივიღებთ:



ნახ. 56. მალთუსის განტოლების ამონახსნის დროზე დამოკიდებულების გრაფიკი

ლოჯისტიკური დიფერენციალური განტოლება აღწერს პოპულაციის დინამიური ზრდის მოდელს. მოდელი აღწერს სახეობის დაღუპვას ან მცირე დროში ცვლილებას შემოსაზღვრული სივრცის, საკვების სიმცირისა, კონკურენტების აქ-

ტივობის ან მტაცებლების არსებობის პირობებში. ეს მოდელი უმჯობესდებოდა 150 წლის განმავლობაში და მისი აგება დაეყრდნო მათემატიკოს ფერხიულსტის შრომებს. მან ჩამოაყალიბა ლოჯისტიკური განტოლება მოსახლეობის რაოდენობის აღსაწერად. მან მალთუსის განტოლებაში შეიტანა დამატებითი უარყოფითი წევრი, რომელიც ზღუდავს რაოდენობის ზრდის სიჩქარეს. ეს წევრი ასახავს მოსახლეობის შემცირებას, არსებობის არეალის შეზღუდვის ან საარსებო რესურსების რაოდენობის შემცირების გამო.

$$\dot{\mathrm{N}}\,(\mathrm{t}) = \mathrm{rN}(\mathrm{t})(\mathrm{K} - \mathrm{N}(\mathrm{t}))/\mathrm{K}$$

აღვნიშნოთ N=y-ით, $r/K = a$ – თი , მაშინ ეს განტოლება ამოიხსნება ბრძანება dsolve-ს გამოყენებით

```
>> y=dsolve('Dy=r*y*-a*y^2','y(0)=1')
y =
   (2^(1/2)*(1/(a*r*t + 1/2))^(1/2))/2
```

ან სასაზღვრო პირობის გარეშე:

```
>>z=('Dy-r*y+a*y^2=0');dsolve(z)
ans =
      0
      r/a
-(r*(tan((r*(C15 + t)*i)/2) + i)*i)/(2*a)
```

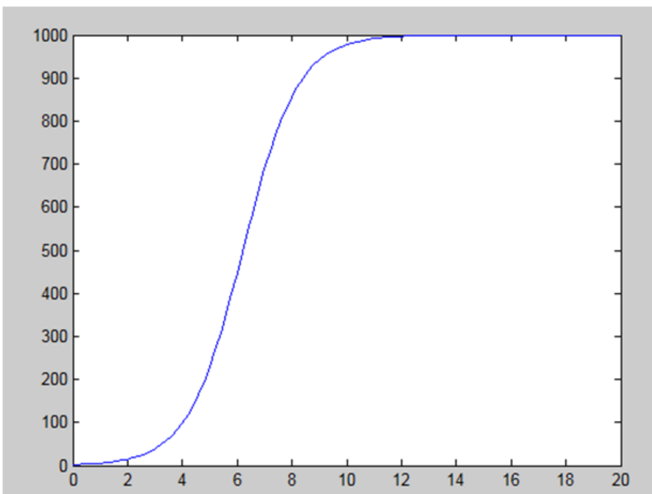
ეს განტოლება იხსნება ანალიზურად და ამონახსნის სახეა:

$$N(t) = \frac{K}{1 + [K/N_0]e^{-rt}}.$$

ავაგოთ ამ ფუნქციის გრაფიკი MATLAB-ის დახმარებით:

```
n0=2;
r=1;
t=0:0.2:20;
k=1000;
nt=k./(1+(k./n0-1)*exp(-r.*t));
figure
plot(t,nt)
```

მივიღებთ გრაფიკს შემდეგი სახით:



ნახ. 57. ლოჯისტიკური განტოლების ამონახსნის დროზე დამოკიდებულების გრაფიკი

იგივე ტიპის გრაფიკი შეიძლება მივიღოთ ლოჯისტიკური დიფერენციალური განტოლების ამოხსნის შედეგად.

მაგალითი 78. პოპულაციის სიმკვრივე $N(t)$ დამოკიდებულია დროზე და აღვნიშნოთ $x(t)$. პარამეტრი ***r* წარმოადგენს ზრდის სიჩქარეს, ხოლო *K* -ეკოლოგიური სისტემის პოტენციალური ტევადობაა.**

შევქმნათ m-ფაილფუნქცია და დავარქვათ მას სახელი logistic1

```
function dxdt = logistic1(t,x,r,K)
dxdt = r*x*(K-x)/K;
```

% ავირჩიოთ პარამეტრებისათვის შემდეგი მნიშვნელობები: ***r***= 1;***K***= 1000 და საწყისი პირობა

x0 =2. ამის შემდეგ შეგვიძლია ჩავატაროთ ODE ინტეგრების პროცედურა დროით ინტერვალში $0 \leq t \leq 20$ და ავაგოთ გრაფიკი. ამისათვის ბრძანებათა ველში უნდა ავკრიფოთ: [t,x] = ode45(@logistic1, [0 20], 2,[], 1,1000); plot(t,x)

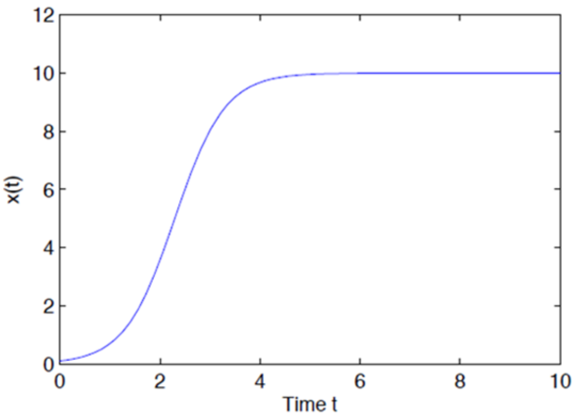
დავაჭიროთ enter-ს და მივიღებთ ზუსტად წინა ამოცანაში მიღებულ გრაფიკს.

მაგალითი 79.

%ეხლა შევცვალოთ პარამეტრები. ავირჩიოთ პარამეტრებისათვის შემდეგი მნიშვნელობები: ***r***= 2;***K***= 10 და %საწყისი პირობა x0 =0 .1. ამის შემდეგ შეგვიძლია ჩავატაროთ ODE ინტეგრირების პროცედურა დროით %ინტერვალში $0 \leq t \leq 10$ და ავაგოთ გრაფიკი. ამისათვის ბრძანებათა ველში უნდა ავკრიფოთ:

```
[t,x] = ode45(@logistic1,[0 10],0.1,[],2,10); plot(t,x)
```

დავაჭიროთ enter-ს და მივიღებთ:



ნახ.58. ლოჯისტიკური დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი პარამეტრებისათვის r=2, K=10 და x0=0.1

მაგალითი 80.

ახლა ამოვხსნათ ლოჯისტიკური დიფგანტოლება ორი განსხვავებული პარამეტრისათვის

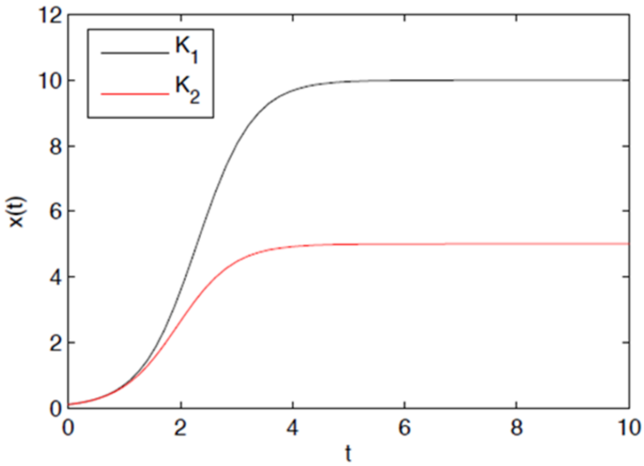
K1 = 10;K2 =5.

ამისათვის საჭიროა, შევქმნათ m-ფაილფუნქცია

```
function dxdt = logistic(t,x,r,K1,K2)
dxdt = zeros(2,1); % სვეტი ვექტორი
dxdt(1) = r*x(1)*(K1-x(1))/K1;
dxdt(2) = r*x(2)*(K2-x(2))/K2;
```

ამრიგად , x და dxdt ახლა ორგანზომილებიანია. უნდა აღინიშნოს ის ფაქტი, რომ dxdt წარმოდგენილია სვეტი ვექტორის სახით

```
x0 = [0.1 0.1];
%ამის შემდეგ შეგვიძლია, ჩავატაროთ ODE ინტეგრირების პროცედურა
[t,x] = ode45(@logistic,[0 10],x0,[],2,10,5);
plot(t,x(:,1),'-k',t,x(:,2),'-r') %ავაგოთ გრაფიკი:
```



ნახ.59. ლოჯისტიკური დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი K პარამეტრის ორი სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის K1=10 და K2=5

§2. ლოტკა-ვოლტერას განტოლება

მაგალითი 81.

ამოვხსნათ ლოტკე-ვოლტერას განტოლება:

$$\dot{y}_1 = y_1 - \alpha y_1 y_2$$
$$\dot{y}_2 = -y_2 - \beta y_1 y_2$$

განვიხილოთ კერძო შემთხვევა, როცა $\alpha = 0.01$, $\beta = 0.02$, დრო იცვლება 0-10 ინტერვალში (ფარდ. ერთ.).

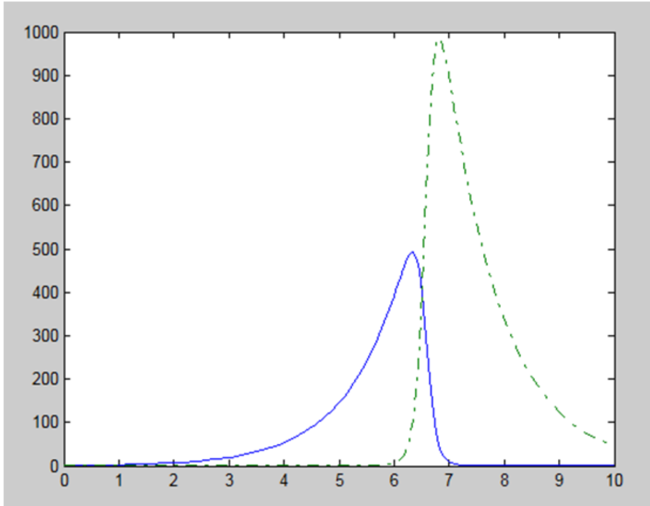
შევქმნათ m-ფაილფუნქცია

```
function dy=ferxiulst(t,y)
dy=zeros(2,1);
dy(1)=y(1)-0.01*y(1)*y(2);
dy(2)=-y(2)+0.02*y(1)*y(2);
```

ბრძანებათა ველში ჩაიწერება:

```
[T,Y] = ode23('ferxiulst',[0 10],[1 1]);
plot(T,Y(:,1),'-',T,Y(:,2),'-.')
```

მივიღებთ:



***ნახ. 60.* ლოტკე-ვოლტერას განტოლების ამონახსნების დროზე დამოკიდებულება**

იგივე ამოცანა შეიძლება ჩაიწეროს სხვა სახითაც:

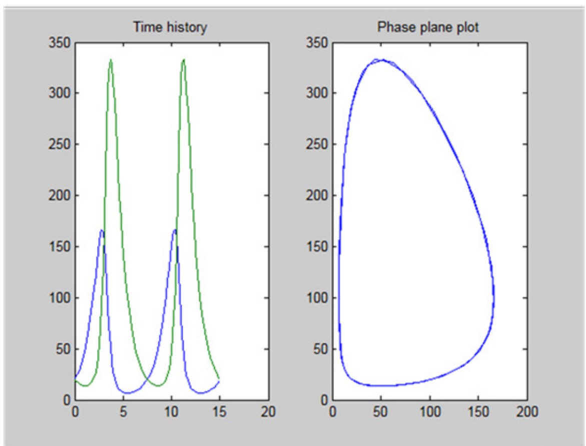
მაგალითი 82.

```
function yp = lotka(t,y)
yp = diag([1 – .01*y(2), -1 + .02*y(1)])*y;
```

ამის შემდეგ ბრძანებათა ველში უნდა ავკრიფოთ:

```
% მონაცემები დროის საწყის და საბოლოო მომენტში
t0 = 0;
tfinal = 15;
y0 = [20 20]';
% დიფგანტოლების სიმულირება
tfinal = tfinal*(1+eps);
[t,y] = ode23('lotka',[t0 tfinal],y0);
subplot(1,2,1)
plot(t,y)
title('Time history')
subplot(1,2,2)
plot(y(:,1),y(:,2))
title('Phase plane plot')
```

მივიღებთ:



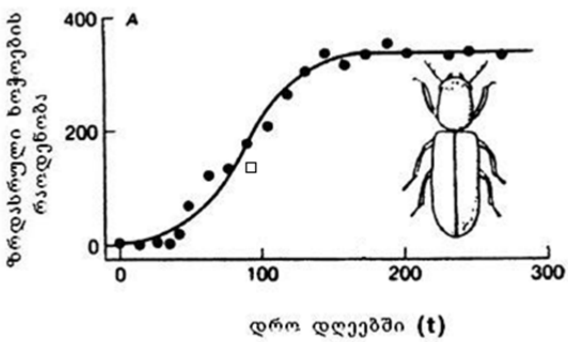
***ნახ. 61.* განტოლების ამონახსნები ფაზურ დიაგრამასთან ერთად**

თავი V

ეკოლოგიური და ფიზიკური ამოცანები “ORIGIN”–პროგრამის გარემოში

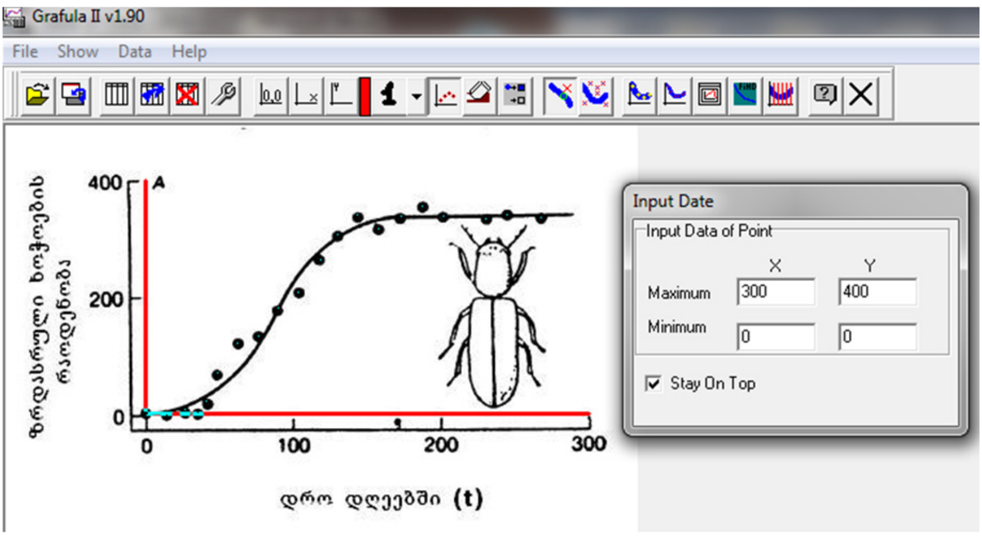
§1. მალთუსის კოეფიციენტის და პოპულაციის ტევადობის განსაზღვრა

მოცემულ ნახაზზე მოყვანილია ზრდასრული ხოჭოების გამრავლების დინამიკა. იმის გამო, რომ საკვების რაოდენობა შეზღუდულია, განვითარება აღიწერება ლოჯისტიკური განტოლებით. ამ გრაფიკის ანალიზისათვის გამოვიყენოთ პროგრამა „Origin”.



ნახ. 62. ხოჭოების გამრავლების დინამიკა

ეს გრაფიკი უნდა გადავიყვანოთ ციფრულ მონაცემებში ანუ მოვახდინოთ მისი დიგიტალიზაცია. ამისათვის გამოიყენება პროგრამა „ Grafula” .

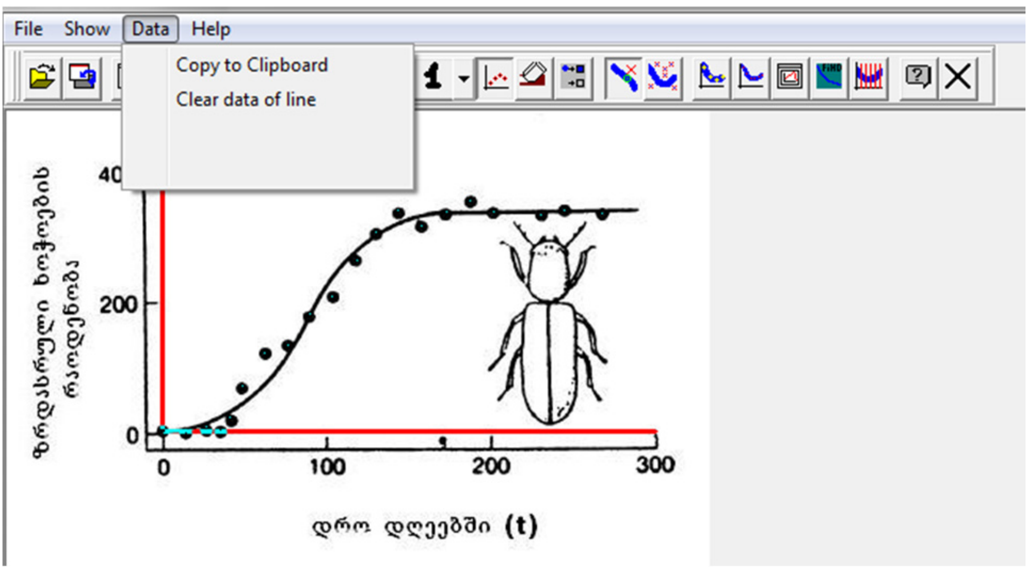


ნახ. 63

მიღებული მონაცემები ცხრილის სახით

1	X	Y1	Y2
1	0	2.42424242	
2	13.375796	0	
3	25.796178	4.84848484	
4	34.394904	0	
5	41.082802	21.8181818	
6	48.726114	70.3030303	
7	61.146496	118.787878	
8	76.433121	133.333333	
9	89.808917	181.818181	
10	103.18471	208.484848	
11	118.47133	264.242424	
12	128.98089	305.454545	
13	142.35668	339.393939	
14	157.64331	317.575757	
15	171.97452	336.969696	
16	187.26114	356.363636	
17	200.63694	336.969696	
18	230.25477	334.545454	
19	244.58598	341.818181	
20	267.51592	336.969696	
21			

იგზავნება ბუფერში. ამისათვის პროგრამის ზედა პანელში შევდივართ ფანჯარაში „Data“ და ვიყენებთ ბრძანებას „Copy to Clipboard“



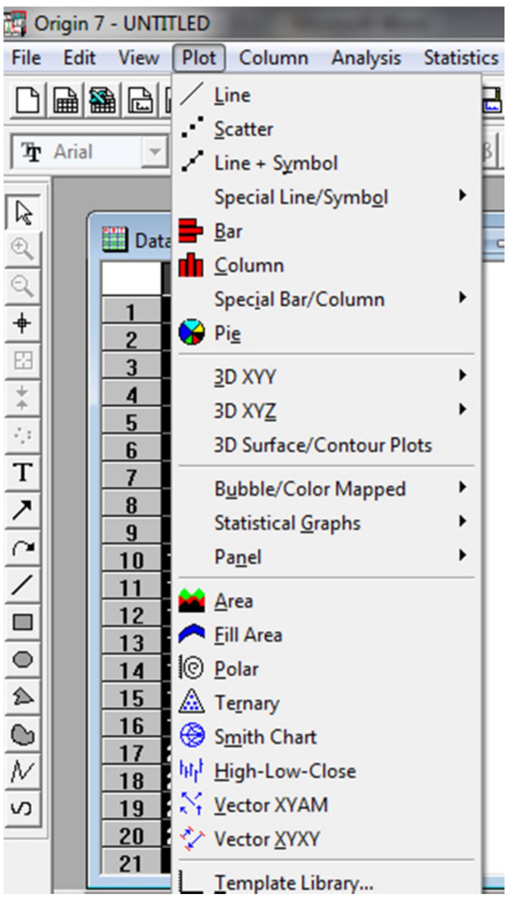
ნახ. 64

Data1

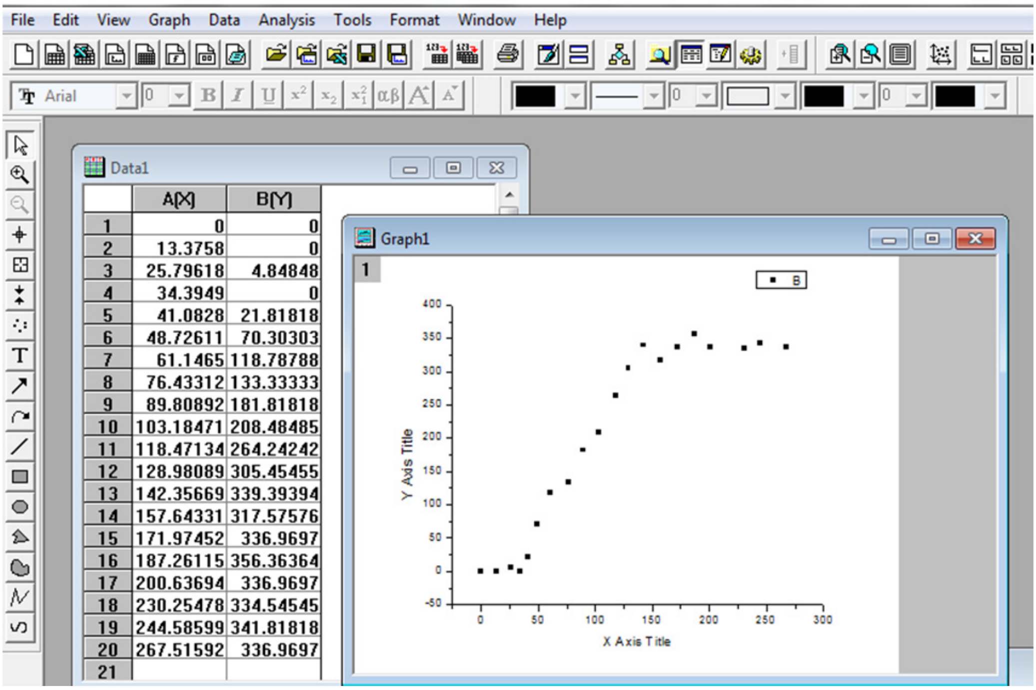
	A(X)	B(Y)
1	0	2.42424
2	13.3758	0
3	25.79618	4.84848
4	34.3949	0
5	41.0828	21.81818
6	48.72611	70.30303
7	61.1465	118.78788
8	76.43312	133.33333
9	89.80892	181.81818
10	103.18471	208.48485
11	118.47134	264.24242
12	128.98089	305.45455
13	142.35669	339.39394
14	157.64331	317.57576
15	171.97452	336.9697
16	187.26115	356.36364
17	200.63694	336.9697
18	230.25478	334.54545
19	244.58599	341.81818
20	267.51592	336.9697

ბუფერში შენახული მონაცემები შეგვყავს პროგრამა “Origin”-ში და ვაგებთ ნახაზს მოცემული წერტილების მიხედვით. ამისათვის საჭიროა, მოინიშნოს A(X) B(Y) ბრძანება Ctrl+V-თი მონაცემები შეიყვანება პროგრამაში ცხრილის სახით:

ეს მონაცემები კვლავ უნდა მოინიშნოს. ამ დროს ზედა პანელში გამოჩნდება ფანჯარა “Plot”, რომელშიც შესვლის შემდეგ შეგვიძლია ავირჩიოთ გრაფიკის აგების სხვადასხვა გზა.

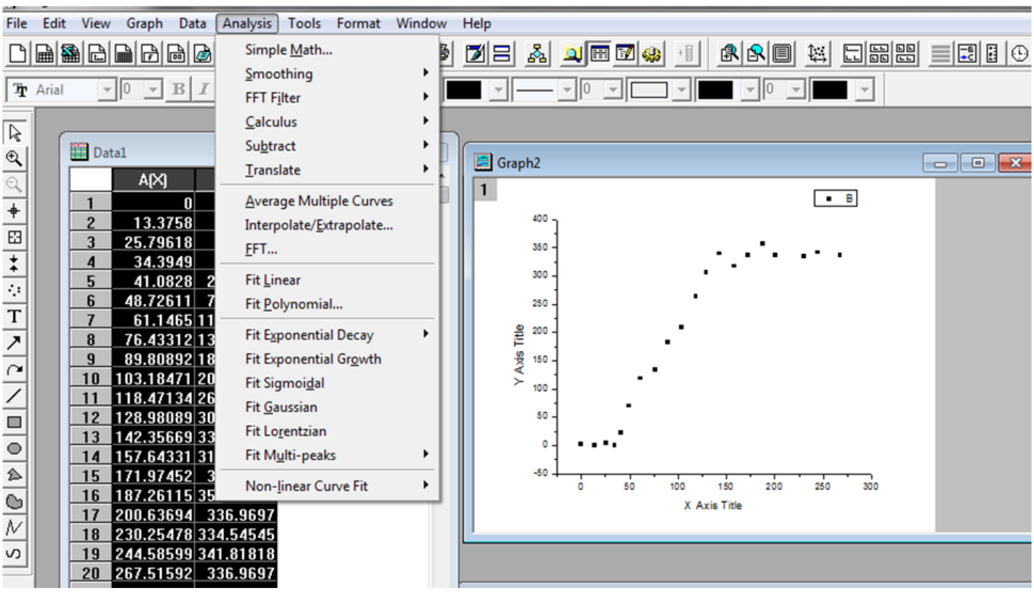


ჩვენ ვირჩევთ ოფციას “Scatter” , რაც ნიშნავს მხოლოდ წერტილების სახით სურათის წარმოდგენას.



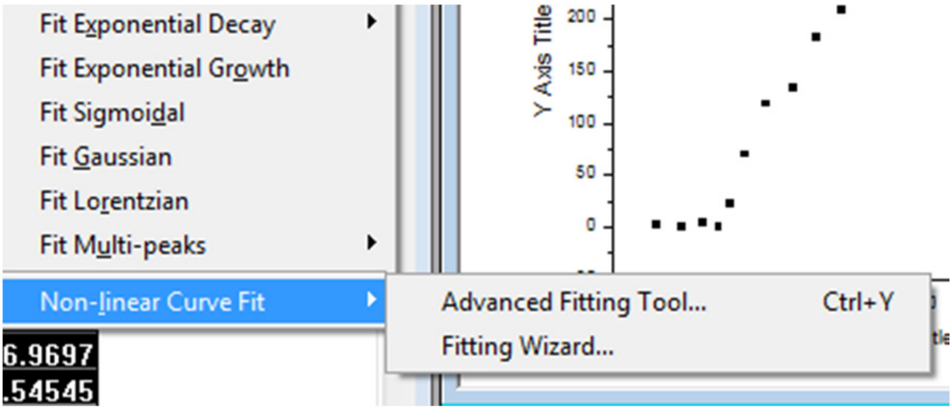
ნახ. 65

ამის შემდეგ ვირჩევთ ოფციას “Analysis”, შევდივართ მასში



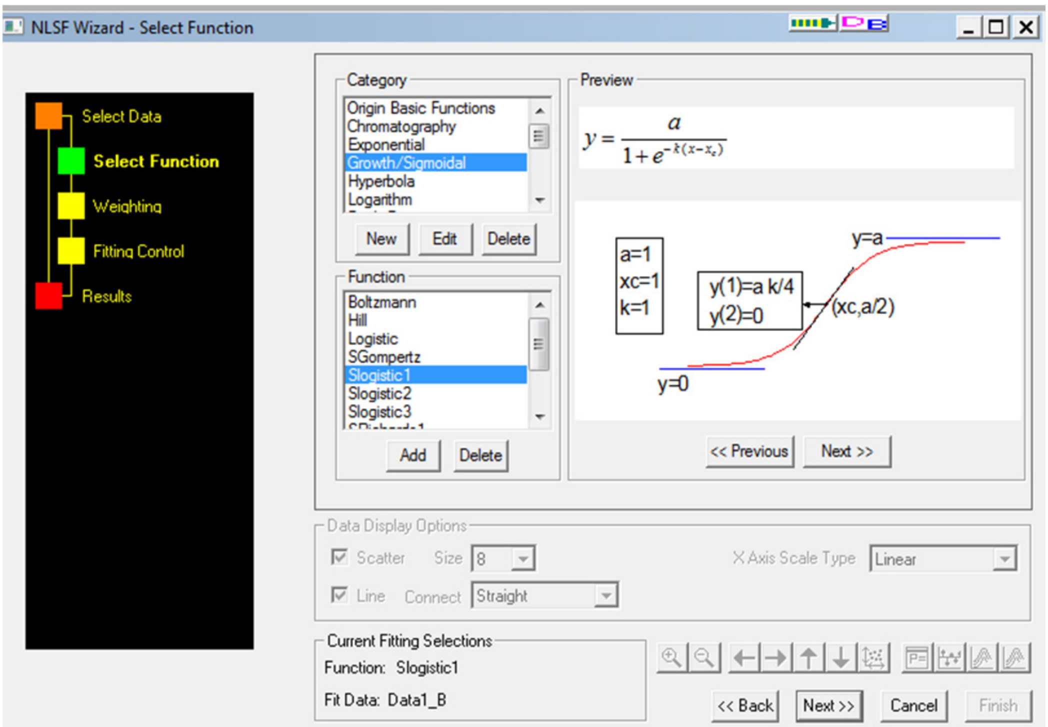
ნახ. 66

და ვირჩევთ ქვეფანჯარას Non-linear Curve Fit. მასში შესვლის შემდეგ ვირჩევთ ოფციას “Fitting vizard”



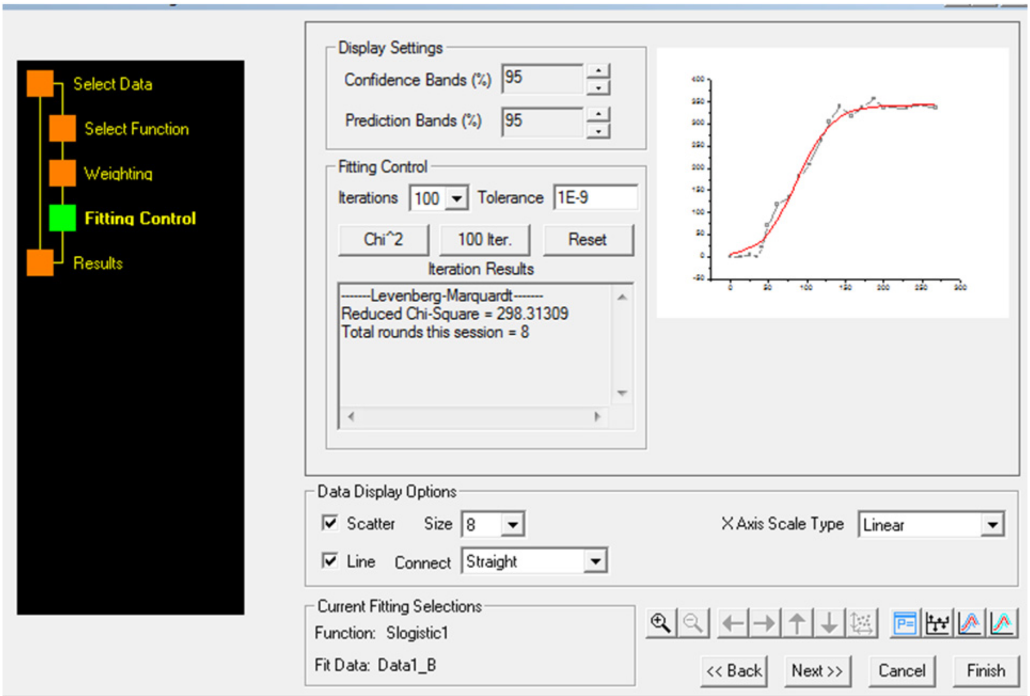
ნახ. 67

ავანთებთ ოფციას „Select Function” და მარჯვნივ მოცემულ ფანჯრებში ავირჩევთ კატეგორიას (Category) Growth/Sigmoidal და ფუნქციას (Function) Slogistic1.



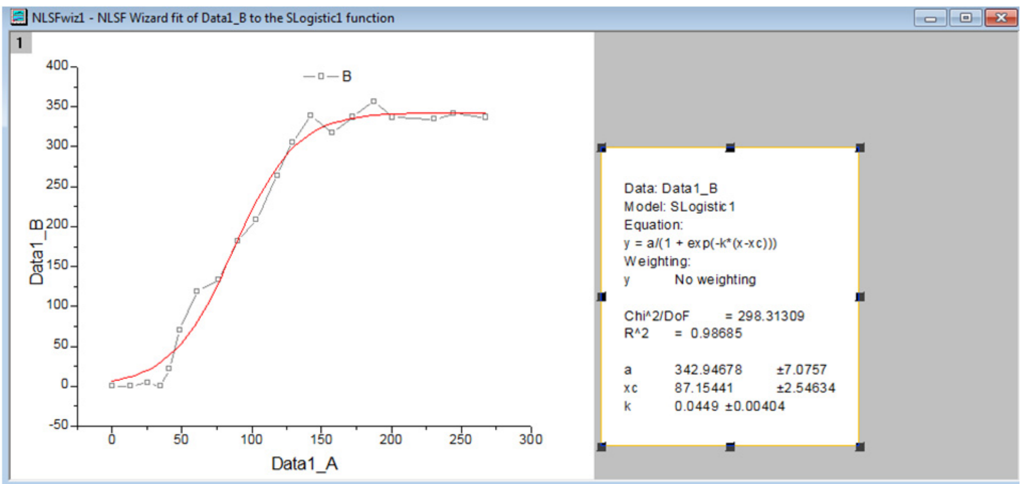
ნახ. 68

დავაჭერთ ღილაკს “next”. შევარჩევთ აპროქსიმაციის სიზუსტეს-იტერაციების რაოდენობას მონაცემთა დამუშავებისას ხიკვადრატის მეთოდით



ნახ. 69

და დავაჭერთ ღილაკს “Finish”. ყოველივე ამის შემდეგ მივიღებთ ექსპერიმენტულ მონაცემებზე აგებულ მრუდს (წითელი ფერის) და მრუდის ანალიზურ გამოსახულებას (ჩარჩოში) შესაბამისი კოეფიციენტებით.



ნახ. 70

როგორც ვიცით, ლოჯისტიკური განტოლების

$$\frac{dx}{dt} = rX\left(1 - \frac{X}{K}\right) \tag{1}$$

ამონახსნის სახეა:

$$X(t) = \frac{X_0 K e^{rt}}{K - X_0 + X_0 e^{rt}}. \tag{2}$$

გავყოთ მრიცხველი და მნიშვნელი $X_0 e^{rt}$- ზე, მაშინ მივიღებთ :

$$X(t) = \frac{K}{1 + \frac{K - X_0}{X_0} e^{-rt}}\ . \tag{3}$$

გარდავქმნათ ეს გამოსახულება შემდეგნაირად.

შემოვიღოთ აღნიშვნა $\frac{K-X_0}{X_0} = e^{rt_c}$, მაშინ მივიღებთ::

$$X(t) = \frac{K}{1 + e^{-r(t-t_c)}}\ . \tag{4}$$

ეს ფორმულა ექსპერიმენტული მონაცემების პროგრამა “Origin”-ის საშუალებით (ჩატარებული ანალიზისას) მიღებული ფორმულის ანალოგიურია:

```
Data: Data1_B
Model: SLogistic1
Equation:
y = a/(1 + exp(-k*(x-xc)))
Weighting:
y          No weighting

Chi^2/DoF        = 298.31309
R^2      =  0.98685

a          342.94678         ±7.0757
xc         87.15441          ±2.54634
k          0.0449  ±0.00404
```

ანალიზის შედეგად მიღებული მონაცემებიდან ჩანს, რომ a≈343 სიდიდე გამოსახავს პოპულაციის ტევადობას – K-ს (1) ფორმულაში (ლოჯისტიკური ამონახსნის), ხოლო სიდიდე k = 0.0449 – მალთუსის კოეფიციენტს r-ს.

ამრიგად, ექსპერიმენტული მონაცემების დამუშავების შედეგად მიიღება, რომ პოპულაციის ტევადობა K = 343 ± 7, ხოლო მალთუსის კოეფიციენტი r = 0.0449.

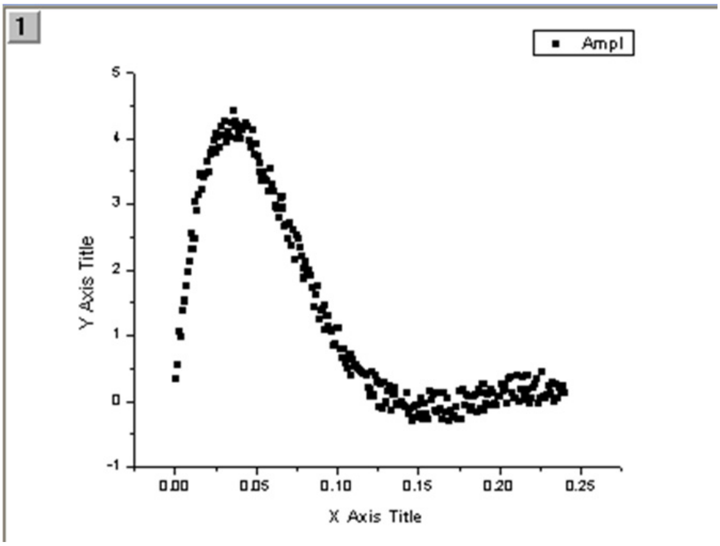
§2. მონაცემების ფურიე ანალიზი

ახლა განვიხილოთ ექსპერიმენტული მონაცემები, რომელიც დაბალი სიხშირის ეფექტზე მაღალი სიხშირის ხმაურის ზედდების შედეგია.

NoisyData

	Time(X)	Ampl(Y)
1	1E-3	0.34391
2	0.002	0.55521
3	0.003	1.0563
4	0.004	0.97923
5	0.005	1.38473
6	0.006	1.52278
7	0.007	1.76042
8	0.008	1.96653
9	0.009	2.12463
10	0.01	2.56168
11	0.011	2.32137
12	0.012	2.47921
13	0.013	3.02567
14	0.014	2.90745
15	0.015	3.13703
16	0.016	3.4461
17	0.017	3.21917
18	0.018	3.41658
19	0.019	3.46079
20	0.02	3.64485
21	0.021	3.49143
22	0.022	3.76505
23	0.023	3.82044
24	0.024	3.96682
25	0.025	3.78539
26	0.026	4.06655
27	0.027	4.0288
28	0.028	3.86954
29	0.029	4.17845
30	0.03	4.03827
31	0.031	4.26468
32	0.032	3.93353
33	0.033	4.0999
34	0.034	4.02283
35	0.035	4.24265
36	0.036	4.41507

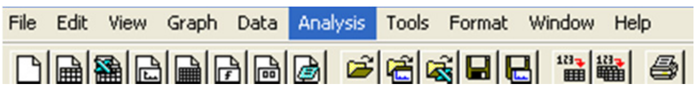
ამოცანის მიზანია ამ მონაცემებიდან ცალკე რეალური – ნამდვილი (დაბალი სიხშირის) მონაცემების გამოყოფა. ავაგოთ გრაფიკი წერტილების სახით.



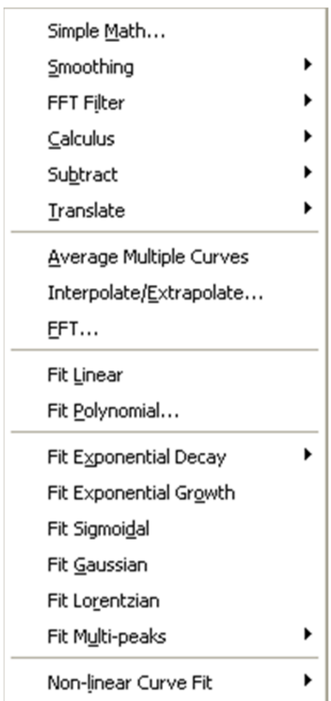
ნახ. 71. ექსპერიმენტული მონაცემები ხმაურის ფონზე

განვიხილოთ კონკრეტული შედეგი (ნახ.71), რომელიც წარმოადგენს ექსპერიმენტული პიკის სურათს ხმაურის ფონზე.

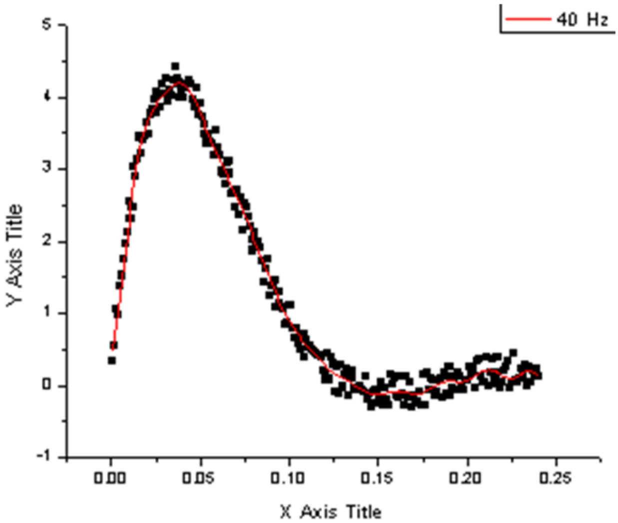
ახლა “Origin” პროგრამის ამოცანათა-ბრძანებათა პანელზე ავირჩიოთ ოფცია Analysis და შევიდეთ მასში



მივიღებთ ჩამონათვალს:

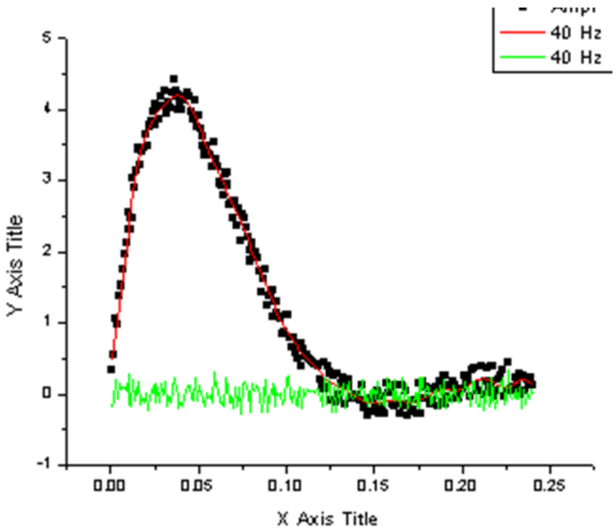


უნდა ვისარგებლოთ ოფციით FFT Filter, შემდეგ ვისარგებლოთ დაბალი სიხშირის ფილტრით Low Pass და გამოვყოთ ის (უნდა მიეთითოს დაბალი სიხშირის ზედა ზღვარი) მაღალი სიხშირის ხმაურის ფონზე მივიღებთ წითელი ფერის (ფერი შეიძლება შეირჩეს დამოუკიდებლად) მრუდს, რომელიც წარმოადგენს რეალურ სიგნალს.



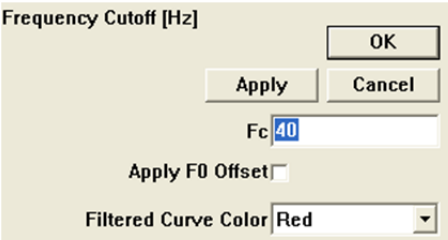
ნახ. 72. დაბალ სიხშირული სიგნალის გამოყოფა ხმაურის ფონზე

იგივე პროცედურით შეგვიძლია ცალკე გამოვყოთ მაღალ სიხშირული ხმაურის კომპონენტი (მწვანე ფერის მრუდი) ფილტრით High Pass:



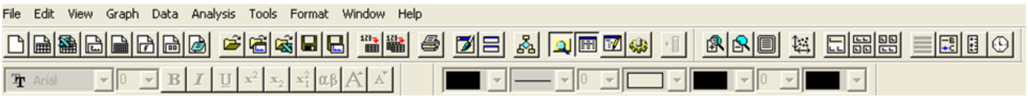
ნახ. 73. მაღალსიხშირული ხმაურის გამოყოფა ძირითადი მონაცემებიდან

უნდა გვახსოვდეს, რომ ფანჯარაში

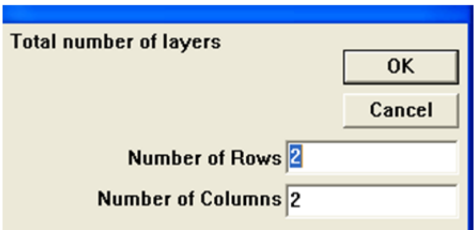


უნდა მივუთითოთ სიხშირის ქვედა ზღვარი და მრუდის ფერი.

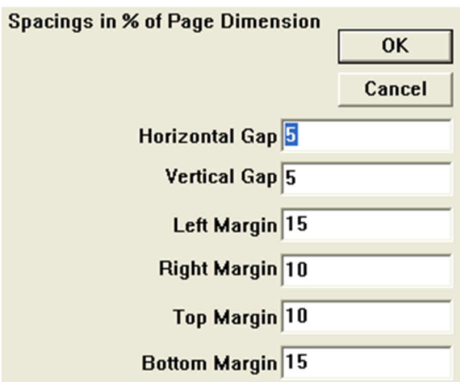
ახლა შეგვიძლია ეს მრუდები წარმოვადგინოთ ცალ-ცალკე. ამისათვის ძირითად პანელზე უნდა ვისარგებლოთ ოფციით,



 რომელიც გვაძლევს საშუალებას, ავირჩიოთ ქვეშრეების რიცხვი:

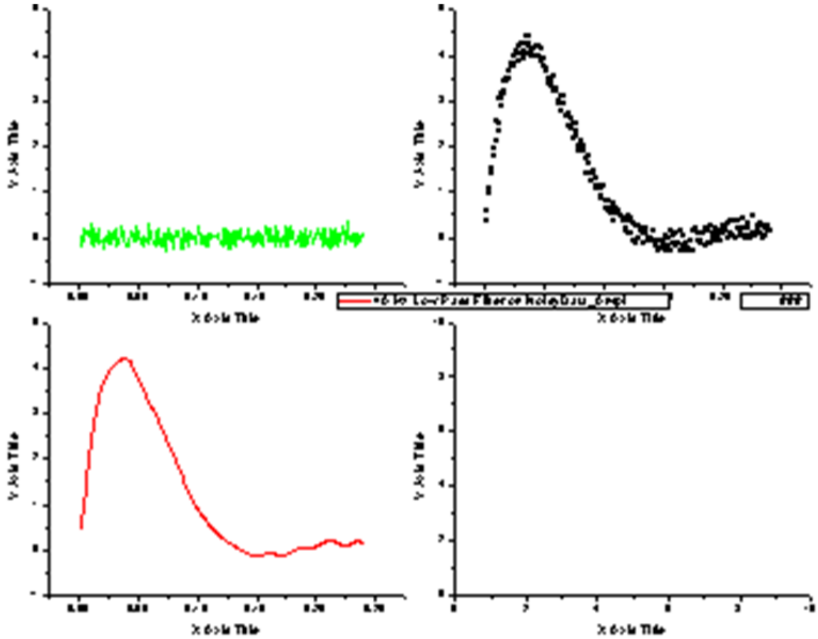


ნახაზებს შორის დაშორება და მათი განლაგება ერთ ფურცელზე:



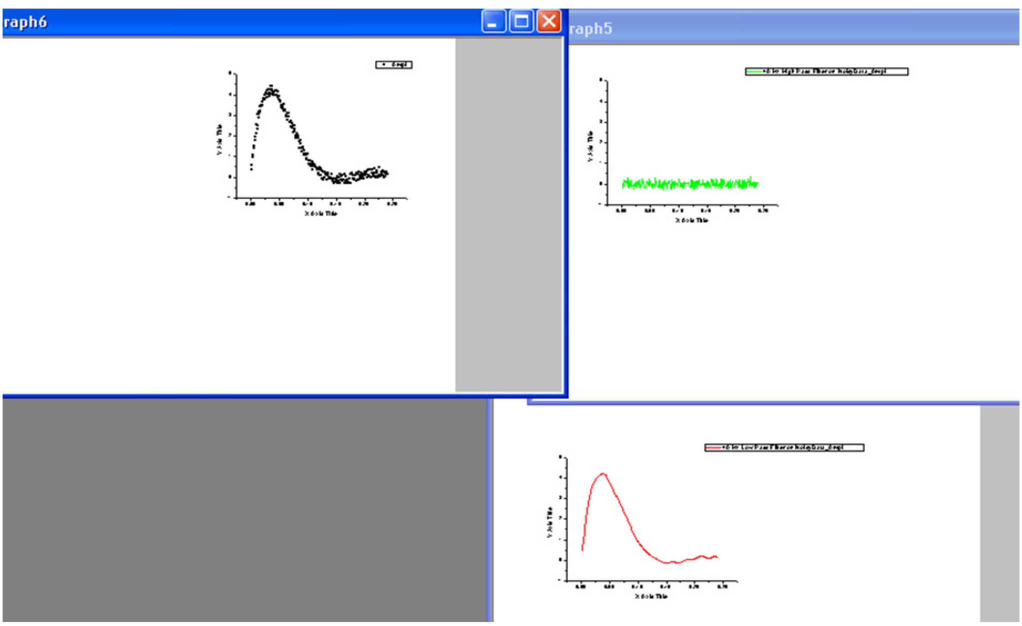
,

საბოლოოდ მივიღებთ ერთ გვერდზე გამოსახულ რამდენიმე მრუდს, რომლებიც ცალ-ცალკე ასახავენ მაღალი და დაბალი სიხშირის კომპონენტებს და მათ ჯამს (საწყის მონაცემებს):



*ნახ. **74.** მონაცემების გრაფიკული სურათები ცალ-ცალკე ერთ ნახაზზე*

ახლა შეგვიძლია ეს გრაფიკები გამოვსახოთ ცალ-ცალკე, დამოუკიდებლად ახალ გვერდებზე, ამისათვის უნდა გამოვიყენოთ ოფცია 



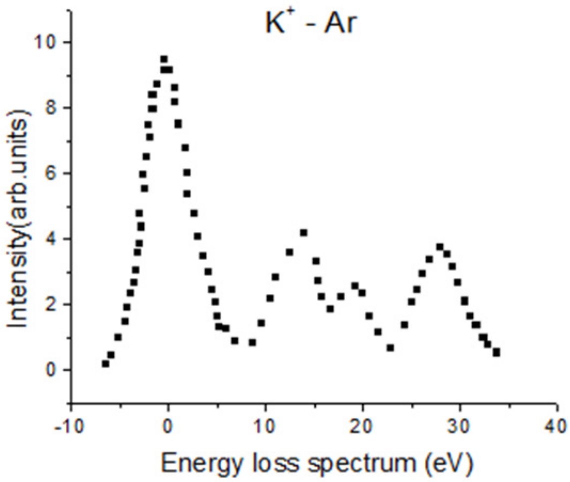
*ნახ. **75.** გრაფიკული სურათები წარმოდგენილი წალკეული ნახაზების სახით*

ამის შემდეგ შეგვიძლია დამოუკიდებლად ვიმუშაოთ თითოეულ გრაფიკზე.

§3. სპექტროსკოპული მონაცემების დამუშავება "Origin"-პროგრამულ გარემოში

ნახ. 76 მოცემულია ენერგეტიკული დანაკარგების სპექტრის სურათი, რომელიც მიღებულია K^+ იონების Ar -ის ატომებთან დაჯახებისას.

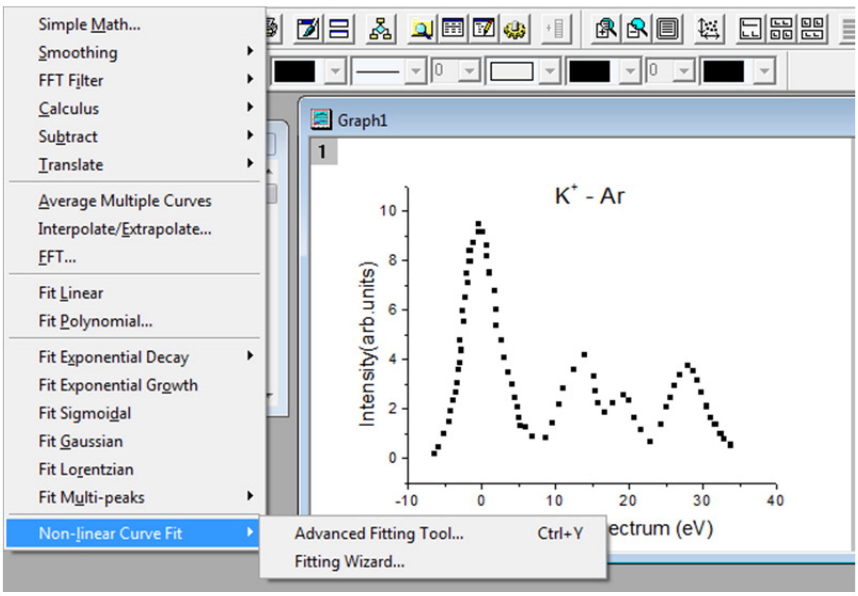
პირველი პიკი შეესაბამება დრეკად დანაკარგს, დანარჩენები არადრეკად ენერგეტიკულ დანაკარგებს, K^+ იონების აგზნების, Ar -ის ატომების აგზნებისა და იონიზაციის პროცესებში.



ნახ. 76. ენერგეტიკული დანაკარგების სპექტრალური სურათი

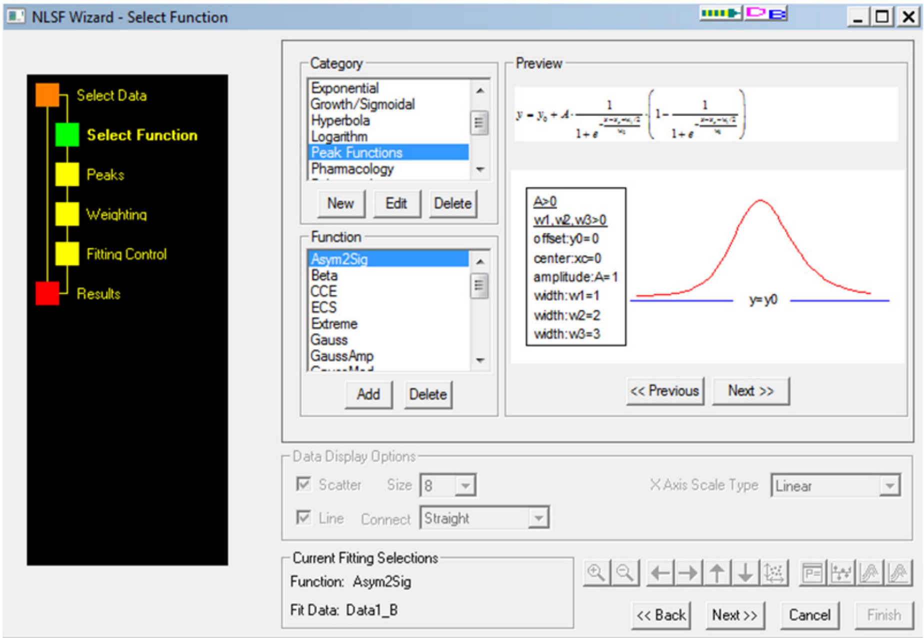
სპექტრალური ხაზების გაფართოება განპირობებულია გამზომი ხელსაწყოს აპარატული ფუნქციის გავლენით. ამ აპარატული ფუნქციის სახე შეიძლება დავადგინოთ პირველი-დრეკადი პიკის ანალიზის საფუძველზე. ეს პიკი თავისუფალია ყველა დანარჩენი პიკების ზედდებისაგან. ჩავატაროთ ამ პიკის დამუშავება **"Origin"**-პროგრამის საშუალებით.

პროგრამის ზედა პანელში ავირჩიოთ ოფცია "Analisys", შემდეგ



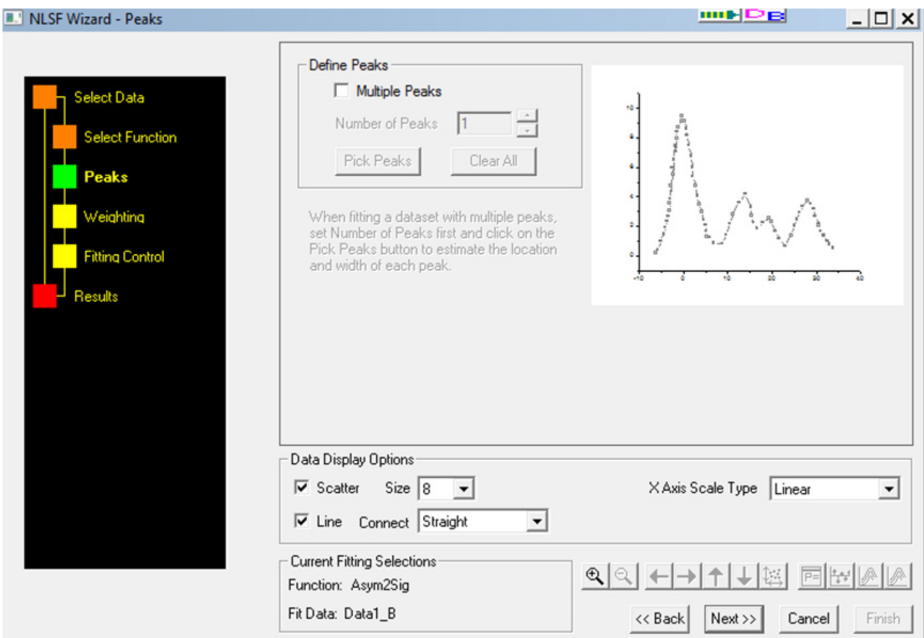
ნახ. 77

"Fit Multi-Peaks", შემდეგ "Fitting Wizard".
შემდეგ ავირჩიოთ ფუნქცია:



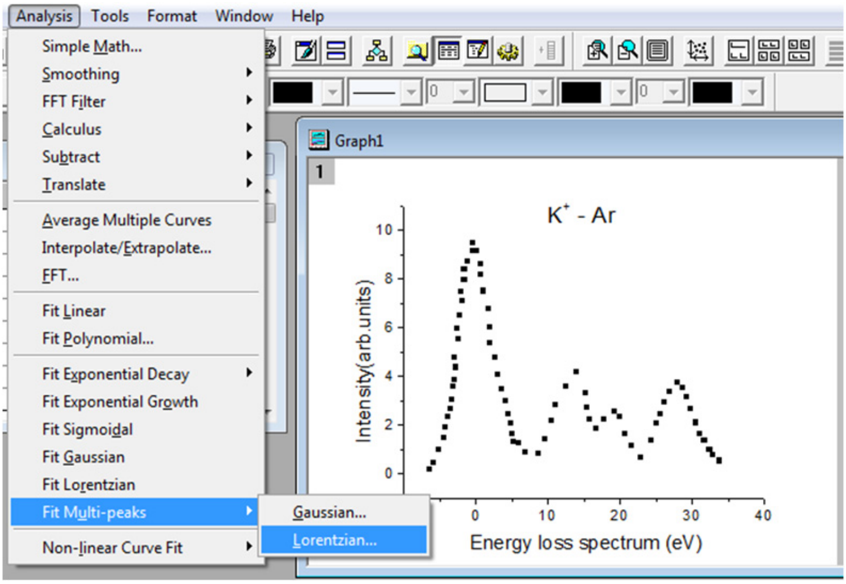
ნახ. 78

პიკების რაოდენობაში მივუთითოთ 1 პიკი



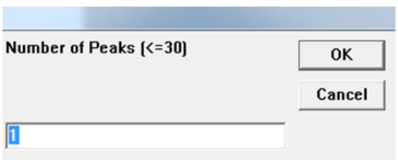
ნახ. 79

და გადავიდეთ შემდეგ ეტაპზე. ამისათვის გამოვიყენოთ ღილაკი 

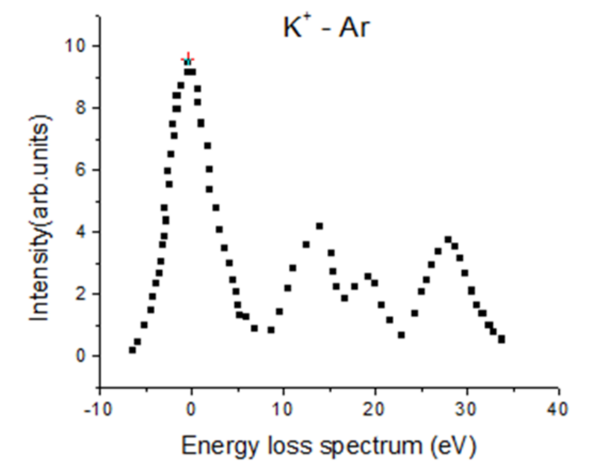


ნახ. 80

შემდეგ "Lorentzian" ან "Gaussian". ავირჩიოთ ერთი პიკი

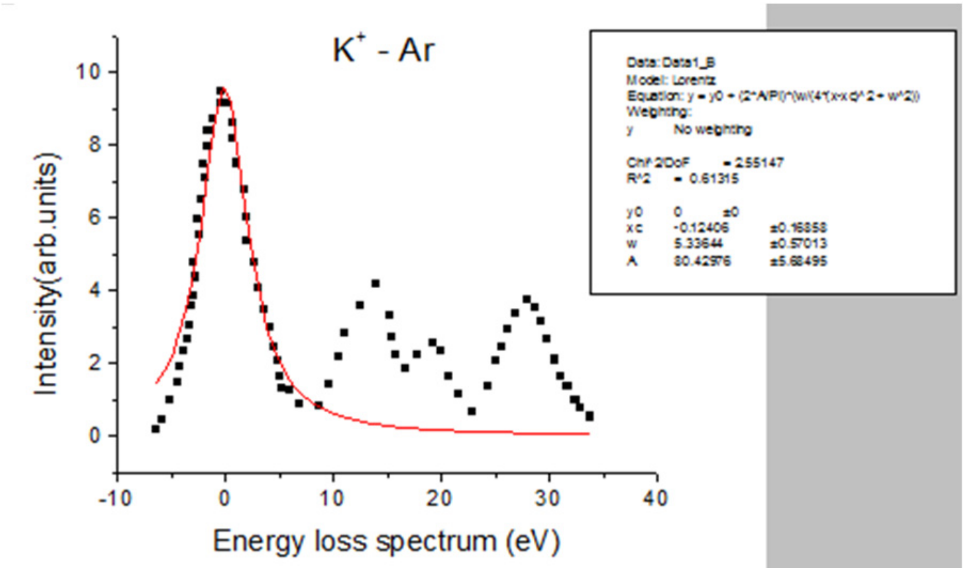


და მოვნიშნოთ პირველი პიკი.



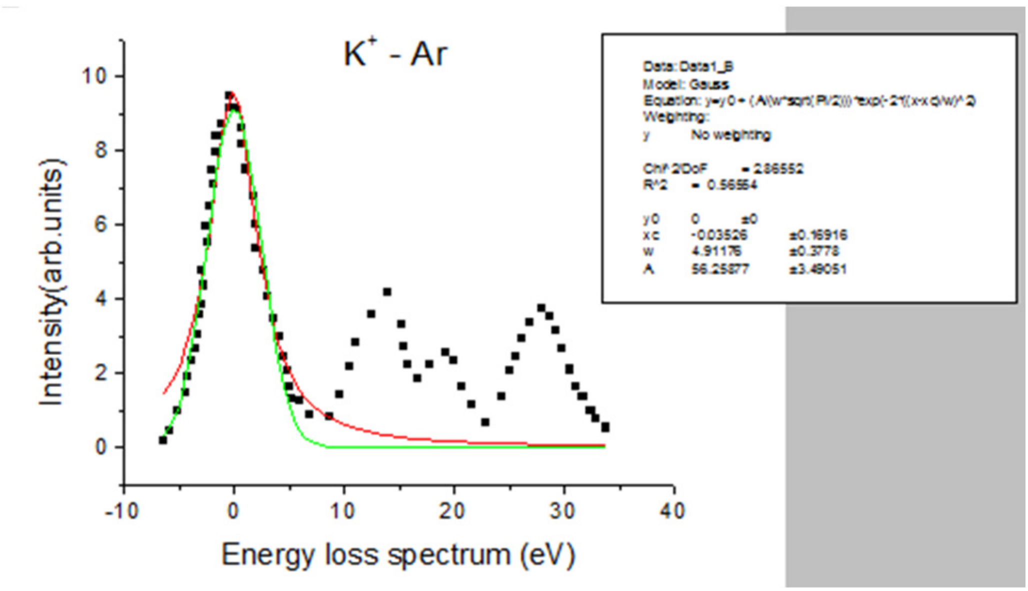
ნახ. 81

მივიღებთ შემდეგ შედეგს:



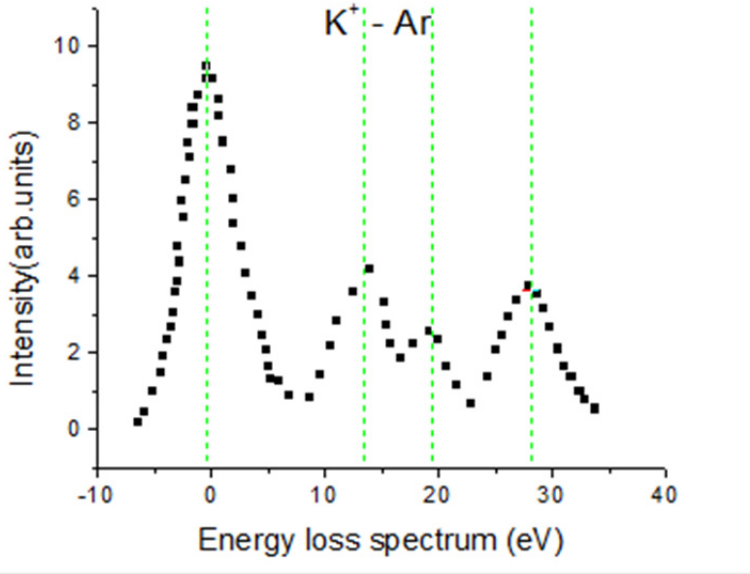
ნახ. 82

იგივე პროცედურა ჩავატაროთ გაუსიანის დახმარებით (მწვანე ფერის პრუდი).



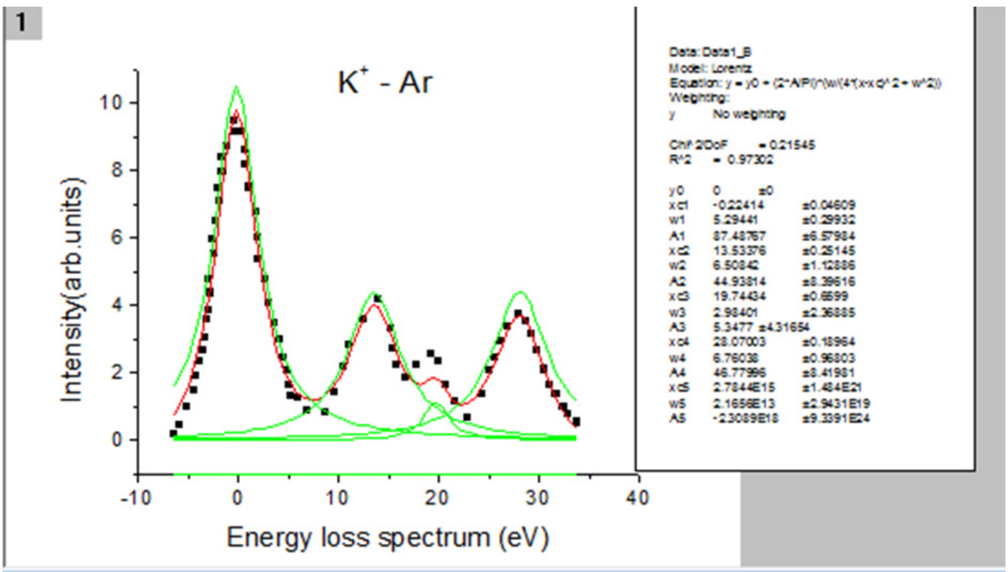
ნახ. 83

ვხედავთ, რომ მეორე შემთხვევაში შედეგი უკეთესია. ახლა პროცედურა ჩავა-ტაროთ 5 პიკისათვის.



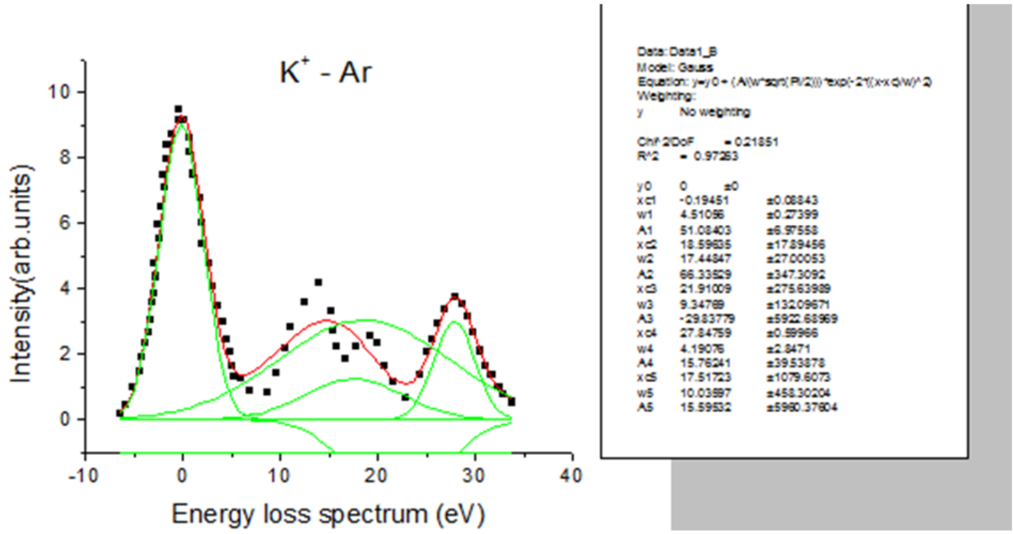
ნახ. 84

მივიღებთ შედეგს ლორენციანისათვის:



ნახ. 85

და გაუსიანისათვის:



ნახ. 86

უკეთესი შედეგი მიილება პირველ შემთხვევაში.

ლიტერატურა:

1. MICHAEL GILLMAN., «An Introduction to Mathematical Models in Ecology and Evolution:
2. Time and Space» A John Wiley & Sons, Ltd., Publication 2009.
3. Смит Дж. М., «Модели в Экологии», перевод «Мир», 1976.
4. Базыкин А.Д., «Математическая биофизика взаимодействующих популяции», Москва « Наука»1985.
5. Ризниченко, Математические модели в биофизике и экодогии. Москва, Ижевск: 2003, 184стр.
6. Светланов В.А. Основы методологии моделирования природных систем. Москва. Изд. УНЦ ДО, 2010. 120 с.
7. Кипятков В. Е., Практикумпо математическому моделированиюв популяционной экологии (учебное пособие) Санкт-Петербург, 2002.
8. АЛЕКСЕЕВ В. В., КРЫШЕВ М. М., САЗЫКИНА Т. Г.; ФИЗИЧЕСКОЕ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОСИСТЕМ; Санкт-Петербург , Гидрометеойздат, 1992
9. Половко А. М., Бутусов П. Н. MATLAB для студента. СПб.: БХВ Санкт-Петербург, 2005. 320 с: ил.
10. Семенова Е. Е., Кудрявцева Е. В., «Математические методы в экологии», Сборник задач и упражнений, Петрозаводск ,Изд. Петр ГУ, 2005.
11. Поршнев С. В. «Компьютерное моделирование физических процессов в пакете MATLAB». М.: горячая линия Телеком, 2003, 592 с., ил.
12. Ануфриев И. Е., Смирнов А.Б., Смирнова Е.Н. MATLAB 7. Санкт-Петербург, 2005. 1104 с. ил.
13. Мироновский Л. А., Петрова К. Ю., «Введение в MATLAB», Санкт-Петербург, 2005 г.
14. Г. Л. Коткин, В. С. Черкасский, Компьютерное моделирование физических процессов с
    Использованием MATLAB: Учеб. пособие /Новосиб. ун-т. Новосибирск, 2001. 173 с.
15. MATLAB 7 Mathematics, COPYRIGHT 1984–2009 by The MathWorks, Inc.
16. Золотыхю Н. Ю., «Использование пакета Matlabв научной и учебной работе», Нижний Новгород 2006.
17. Прошин Ю.Н., ЧМММ. Лекции, MatLab: решение дифференциальных уравнений.
18. Шампайн Л. Ф., И. Гладвел, С. Томпсон «Решение обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием MATLAB» Санкт-Петербург • Москва• Краснодар (2009)
19. Дащенко А. Ф., Кириллов В. Х., Коломиец Л. В., Оробей В. Ф., «MATLAB В ИНЖЕНЕРНЫХ И НАУЧНЫХ РАСЧЕТАХ» Одесса «Астропринт» 2003.
20. Won Young Yang (Chung-Ang University, Korea), Wenwu Cao(Pennsylvania State University),Tae-Sang Chung (Chung-Ang University, Korea), John Morris (The

University of Auckland, New Zealand) . «APPLIED NUMERICAL METHODS USING MATLAB» , Published by John Wiley&Sons, Inc., Hoboken, New Jersey. 2005.

21. Otto S. R. and. Denier J.P, An Introduction to Programming and Numerical Methodsin MATLAB, Springer-Verlag London Limited 2005.
22. Исакова О.П., Тарасевич Ю.Ю., Юзюк Ю.И. „Обработка и визуализация данных физических экспериментов с помощью пакета Origin. Анализ и обработка спектро. Учебно-методическое пособие. Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет, 2007
23. OriginLab Corporation., One Roundhouse Plaza., Northampton, MA 01060 USA (413) 586-2013 (800) 969-7720 Fax (413) 585-0126 www.OriginLab.com „Origin C Programming Guide“.
24. Alfio Quarteroni, Fausto Saleri., Scientific Computing with MAT lAB @Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2003 Printed in Germany.
25. Ekkehard Holzbecher, „Environmental Modeling Using MATLAB“ WeierstraЯ-Institut fur Angewandte Analysis und Stochastik (WIAS) Mohrenstr. 39 10117 Berlin Deutschland holzbecher@wias-berlin.de

გამომცემლობის რედაქტორი **რუსუდან მიქენაია**
კომპ. უზრუნველყოფა **ლალი კურდღელაშვილი**
გარეკანის დიზაინერი **ნინო ებრალიძე**

0179 თბილისი, ი. ჭავჭავაძის გამზირი 14
14, Ilia Tchavtchavadze Ave., Tbilisi 0179
Tel: 995(32) 225 14 32
www.press.tsu.edu.ge