ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ნინა დანელია

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

მათემატიკის დეპარტამენტი

პერიოდული ფუნქციების ტრიგონომეტრიული პოლინომებით აპროქსიმაციის საკითხები ბანახის არასტანდარტულ ფუნქციურ სივრცეებში

სადოქტორო დისერტაცია

სამეცნიერო ხელმძღვანელი:

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი ვახტანგ კოკილაშვილი

თბილისი 2016 წელი

რეზიუმე

დისერტაციაში შესწავლილია 2π-პერიოდული ფუნქციების ტრიგონომეტრიული პოლინომებით აპროქსიმაციის საკითხები ბანახის არასტანდარტულ ფუნქციურ სივრცეებში. სახელდობრ, ჩვენი კვლევის ობიექტებია: ცვლადმაჩვენებლიანი ლებეგის სივრცეები და გრანდ ლებეგის წონინი სივრცეების აპროქსიმებადი ქვესივრცეები. დისერტაციაში მიღებულია შემდეგი ძირითადი შედეგები:

●ცვლადმაჩვენებლიან ლებეგის $L^{p(.)}$ სივრცეებში დამტკიცებულია ფუნქციათა კონსტრუქციული თეორიის შებრუნებული ტიპის უტოლობა (ს.ბერნშტეინის ტერმინოლოგიით), როცა უტოლობის სხვადასხვა მხარეს სივრცის მაჩვენებლები განსხვავებულია.

●დადგენილია ის საკმარისი პირობა, რომელსაც უნდა აკმაყოფილებდეს $L^{p(.)}(\min p(x) = 1)$ სივრცის ფუნქცია იმისათვის, რომ მისი შეუღლებული ფუნქცია ეკუთვნოდეს იმავე სივრცეს. განზოგადებული სიგლუვის მოდულისთვის დამტკიცებულია ზიგმუნდის ტიპის უტოლობა და მასზე დაყდნობით აღმოჩენილია $L^{p(.)}(\min p(x) = 1)$ სივრცის ის ქვეკლასი, რომელიც ინვარიანტულია შეუღლების ოპერაციის მიმართ. დადგენილია შეუღლებული ფუნქციის წარმოებულის საუკეთესო მიახლოების შეფასება გამოსავალი ფუნქიის საუკეთესო მიახლოებით.

●$L^{p(.)}(\min p(x) = 1)$ სივრცეებში დადგენილია ტრიგონომეტრიული პოლინომების წილადური რიგის წარმოებულებისთვის ბერნშტეინის უტოლობის ტიპის უტოლობა. ამ უკანასკნელზე დაყრდნობით მიღებულია ფუნქციის წილადური რიგის წარმოებულის სიგლუვის მოდულის შეფასება ტრიგონომეტრიული პოლინონომებით საუკეთესო მიახლოებებით. დამტკიცებულია ჯექსონის მეორე უტოლობა $L^{p(.)}$ სივრცეში, როცა $p \in \mathbb{P}^{log} \cap \mathbb{P}_0$.

●როგორც ცნობილია, გრანდ ლებეგის სივრცეები არასეპარაბელური სივრცეებია. ჩვენ ტრიგონომეტრიული პოლინომებით მიახლოების საკითხები გამოკვლეული გვაქვს გრანდ ლებეგის წონიანი სივრცეების აპროქსიმებად ქვესივრცეებში, რომლებიც წარმოადგენენ გლუვი ფუნქციების ჩაკეტვას გამოსავალი სივრცეების ნორმებით. განხილულია გრანდ ლებეგის წონიანი სივრცის ორი ვარიანტი: $L_w^{p),\theta}$ სივრცე, როცა ნორმის განსაზღვრაში წონა მონაწილეობს როგორც ზომის წარმომქმნელი ფუნქცია და $\mathcal{L}_w^{p),\theta}$ სივრცე, რომლის ნორმის განსაზღვრაში წონას მამრავლის პოზიცია უჭირავს.

●დადგენილია ჰარმონიული ანალიზის ფუნდამენტური ინტეგრალური ოპერატორების (ჰარდი-ლიტლვუდის მაქსიმალური ფუნქცია, სინგულარული ინტეგრალები, რისის პოტენციალი) ასახვის თვისებები $\mathcal{L}_w^{p),\theta}$ სირცეებში. ამ შედეგებმა საშუალება მოგვცა დაგვედგინა შებრუნებული უტოლობა ზოგადი ფორმით, როცა უტოლობის სხვადასხვა მხარეს სივრცის მაჩვენებლები განსხვავებულია.

●$\tilde{L}_w^{p),\theta}$ სივრცის ორი ცვლადის პერიოდული ფუნქციებისთვის შესწავლილია ტრიგონომეტრიული პოლინომებით კუთხური მიახლოების საკითხები.

Ivane Javakhishvili Tbilisi State University

Nina Danelia

Faculty of Exact and Natural sciences

Department of Mathematics

Approximation of Periodic Functions by Trigonometric Polynomials in Nonstandard Banach Function Spaces

PhD Thesis

Scientific Supervisor:

Doctor of Phys. Math. Sciences Vakhtang Kokilashvili

Tbilisi 2016

Abstract

In this thesis we are dealing with the approximation problems of 2π-periodic functions by trigonometric polynomials in the frame of some new nonstandard Banach function spaces. Namely, the subjects of our investigation are variable exponent Lebesgue spaces and approximable subspaces of weighted grand Lebesgue spaces. In the thesis the following results are achieved:

●The inverse type inequalities (in the Bernstein's terminology) of trigonometric approximation in variable exponent Lebesgue spaces are established when on different sides of inequalities the space exponents are different. Namely, the generalized moduli of smoothness in $L^{q(.)}$ space is estimated by the order of converging to zero of the best approximations in $L^{p(.)}$ spaces ($p(x) \leq q(x)$).

●The problem of approximation of periodic functions and the properties of conjugate functions in the space $L^{p(x)}$, when $\min p(x) = 1$ are explored. The Bernstein-Zygmund type inequality for fractional derivatives of trigonometric polynomials is established and relying on this inequality, the direct and inverse inequalities for fractional derivatives are obtained.

●The condition ensuring belonging of the conjugate function to the space $L^{p(x)}$, $\min p(x) = 1$, is explored. The Zygmund type inequality for generalized moduli of smoothness of conjugate function is presented and a subclass, invariant with respect to the conjugate operator is determined.

●A considerable part of thesis deals with the trigonometric approximation in the subspace of weighted grand Lebesgue space the closure of weighted Lebesgue space by the norm of initial space. It is well-known that weighted grand Lebesgue spaces are non-separable, non-reflexive and non-rearrangement invariant function spaces. Two variants of weighted grand Lebesgue spaces are treated: when the weight in the definition of the norm participates as a function generating a measure and the other case, when it plays a role of multiplier. The corresponding subspaces are denoted by $\tilde{L}_w^{p),\theta}$ and $\tilde{\mathcal{L}}_w^{p),\theta}$ respectively.

●Boundedness theorems of harmonic analysis fundamental integral operators (Hardy-Littlewood maximal function, singular integrals, Riesz potentials) are established in $\mathcal{L}_w^{p),\theta}$ spaces. On the base of these results the Bernstein-Zygmund and Nikol'skii type inequalities for trigonometric polynomials in $\mathcal{L}_w^{p),\theta}$ are obtained. These inequalities are making use of the proof of Jackson's type and inverse inequalities in $\tilde{\mathcal{L}}_w^{p),\theta}$. Moreover, the latter one is obtained in general form, when on the different sides of the inequality the space exponents are different.

●For the periodic functions of two variables angular trigonometric approximation is treated in $\tilde{L}_w^{p),\theta}$ space. The Jackson type inequality is established.

შინაარსი

აღნიშვნები

$\mathbb{T}$	$[-\pi,\pi]$ შუალედი
$\mathbb{R}$	რიცხვთა ღერძი
$\mathbb{R}_+$	რიცხვთა ნახევარღერძი $\mathbb{R}_+ = \{x: x > 0\}$
$\mathbb{R}_+^0$	რიცხვთა ნახევარღერძი: $\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$
L^p	ლებეგის სივრცე
$L^{p(.)}$	ცვლადმაჩვენებლიანი ლებეგის სივრცე
$L^{p(.)}(\mathbb{T},w)$	ცვლადმაჩვენებლიანი წონიანი სივრცე, როცა წონა მამრავლია
$L_w^{p(.)}(\mathbb{T})$	ცვლადმაჩვენებლიანი წონიანი სივრცე, როცა ნორმის განსაზღვრაში ინტეგრება ხდება $w(x)dx$ ზომით
$L^{p),\theta}(\mathbb{T})$	გრანდ ლებეგის სივრცე
$\mathcal{L}^{p),\theta}(\mathbb{T},w)$	გრანდ ლებეგის წონიანი სივრცე, როცა w წონა მონაწილეობს როგორც მამრავლი
$L_w^{p),\theta}(\mathbb{T})$	გრანდ ლებეგის წონიანი სივრცე, როცა ნორმის განსაზღვრაში ინტეგრება ხდება $w(x)dx$ ზომით
$\tilde{L}^{p),\theta}(\mathbb{T})$	L^P სივრცის ჩაკეტვა $L^{p),\theta}$ სივრცის ნორმით
$\tilde{L}_w^{p),\theta}(\mathbb{T})$	L_w^P სივრცის ჩაკეტვა $L_w^{p),\theta}$ სივრცის ნორმით
$E_n(f)_F$	ტრიგონომეტრიული პოლინომებით საუკეთესო მიახლოება F სივრცეში
$\Omega_r\left(f,\frac{1}{n}\right)_F$	წილადური რიგის სიგლუვის განზოგადებული მოდული F სივრცეში
$L^{p(.),\theta}$	ცვლადმაჩვენებლიანი გრანდ ლებეგის სივრცე
$\mathbb{P}$	მთელ ღერძზე უწყვეტ 2π პერიოდული $p(x)$ ფუნქციების სიმრავლე, რომელთათვისაც $1 < \min\limits_{\mathbb{T}} p(x)$
$\mathbb{P}_0$	მთელ ღერძზე უწყვეტ 2π პერიოდული $p(x)$ ფუნქციების სიმრავლე, რომელთათვისაც $1 \le \min\limits_{\mathbb{T}} p(x)$
$\mathbb{P}^{log}$	სიმრავლე იმ $p(x)$ ფუნქციებისა, რომლებიც აკმაყოფილებენ სუსტ ლოგარითმულ უწყვეტობის პირობას

შესავალი

სადისერტაციო ნაშრომი ეძღვნება პერიოდულ ფუნქციათა მიახლოების საკითხებს ბანახის ახალ, არასტანდარტულ ფუნქციურ სივრცეებში. ჩვენ განვიხილავთ ცვლადმაჩვენებლიან ლებეგის და გრანდ ლებეგის წონიან სივრცეებს. ზემოხსენებული და მათთან იდეურად მონათესავე სივრცეები და მათი გამოყენებები დღეისათვის წარმოადგენენ სპეციალისტთა ინტენსიური კვლევის საგანს. გასული საუკუნის ბოლოს ცხადი გახდა, რომ კლასიკურ ფუნქციურ სივრცეებს აღარ ძალუძთ მთელი რიგი პრობლემების ამოხსნა, რომლებიც ჩნდება არაწრფივი დრეკადობის თეორიის, უკუმშვად სითხეთა დინების მექანიკის, ფიზიკის მათემატიკურ მოდელებში, არაწრფივ კერძოწარმოებულებიან დიფერენციალურ განტოლებათა თეორიაში და სხვა. გაჩნდა ახალი სივრცეების შემოღებისა და გამოკვლევის აუცილებლობა. ბანახის არასტანდარტულ ფუნქციათა სივრცეებს შორის ერთ-ერთი მათგანია მუსიელაკ-ორლიჩის სივრცეები და განსაკუთრებით ამ სივრცეების კერძო შემთხვევა, ცვლადმაჩვენებლიანი ლებეგის სივრცეები. აღნიშნული სივრცეები პირველად გამოჩნდა გასული საუკუნის 30-იან წლებში ცნობილი პოლონელი მათემატიკოსის ვ. ორლიჩის სტატიაში. თავდაპირველად ამ სივრცეების მიმართ ინტერესი თეორიულ ხასიათს ატარებდა (ი.რაკოსნიკი, ო.კოვაჩიკი, ს.სამკო), მოგვიანებით, გასული საუკუნის ბოლოს კი აღმოჩნდა, რომ ეს სივრცეები სწორედ ის სივრცეებია, რომელთა საშუალებითაც შესაძლებელია გამოყენებითი მათემატიკისა და მექანიკის მთელი რიგი პრობლემების გადაჭრა. ამის მაგალითებია: ელექტრო-რეოლოგიური დინების მოდელირება (ლ.დიენინგი, მ.რუჟიჩკა), ფიზიკაში ლავრენტიევის და მთელი რიგი სხვა ფიზიკური მოვლენების ვარიაციული მეთოდებით გამოკვლევასთან დაკავშირებული ამოცანები (ვ.ჟიკოვი). უკანასკნელ ხანს ზემოხსენებულმა სივრცეებმა ფართო გამოყენება ჰპოვა აგრეთვე სახეთა გამოცნობის თეორიაში (პ.ჰაირულეჰტო, პ.ჰასტო და სხვები).

ბანახის არასტანდარტულ ფუნქციათა სივრცეთა შორისაა გრანდ ლებეგის სივრცეები და მათი წონიანი ანალოგები. ეს სივრცეები გასული საუკუნის 90-იან წლებში შემოიღეს ტ.ივანიეცმა და კ.სბორდონემ [17] იაკობიანის მინიმალურ დაშვებებში ინტეგრებადობის პრობლემასთან დაკავშირებით. დისერტაციაში განხილვის საგანი არის უფრო ზოგადი სახის სივრცე, რომელიც შემოღებულ იქნა მოგვიანებით ლ.გრეკოს, ტ.ივანიეცისა და კ.სბორდონეს მიერ. დღეს ეს სივრცეები ცნობილია გრანდ ლებეგის სივრცეების ან ივანიეც-სბორდონეს სივრცეების სახელწოდებით. ამ სივრცეების შემოღებაც გამოყენებების მოთხოვნილებებით იყო განპირობებული. მაგალითად, აღმოჩნდა, რომ ეს სივრცეები სწორედ ის სივრცეებია, რომელშიც შესაძლებელია ფართო კლასის არაწრფივ კერძოწარმოებულებიან დიფერენციალურ განტოლებათა ამოხსნადობისა და ამონახსნთა ერთადერთობისა და რეგულარობის დადგენა.

უნდა აღინიშნოს, რომ დღეისათვის ცვლადმაჩვენებლიან ლებეგის წონიან სივრცეებსა და გრანდ ლებეგის წონიან სივრცეებში ჰარმონიული ანალიზის ინტეგრალურ ოპერატორთა თეორიამ გამოყენებებითურთ განვითარების მაღალ დონეს მიაღწია. ამის დასტურია უკანასკნელ წლებში გამოქვეყნებული (ან გამოსაქვეყნებლად მიღებული) მონოგრაფიები ([8],[12],[25],[26],[27]). ამ ფაქტს იმიტომაც აღვნიშნავთ, რომ ჩვენი გამოკვლევების ერთ-ერთ მნიშვნელოვან საყრდენს სწორედ ჰარმონიული ანალიზის ინტეგრალური და ფურიეს ოპერატორების ასახვის თვისებები წარმოადგენს ზემოხსენებულ ბანახის არასტანდარტულ ფუნქციურ სივრცეებში.

კლასიკურ ფუნქციურ სივრცეებში ფუნქციათა კონსტრუქციული თეორია გადმოცემულია ცნობილ მონოგრაფიებში [4],[5],[11],[36],[37],[51],[52]. გამოკვლევები ამ მიმართულებით დღესაც ინტენსიურად გრძელდება (იხ.მაგალითად [10], [44],[9],[13]). ცვლადმაჩვენებლიან ლებეგის სივრცეებში ფუნქციათა მიახლოების მიმართულებით უნდა აღინიშნოს ი.შარაპუდინოვის პიონერული ხასიათის ნაშრომები [41-43], [45] და ნაშრომთა შემდგომი ციკლი, რომელიც ასახულია [44] მონოგრაფიაში. ცვლადმაჩვენებლიან ლებეგის წონიან სივრცეებში ფუნქციათა აპროქსიმაციის ამოცანები შესწავლილია [2], [3], [1], [7], [21] ნაშრომებში. რაც შეეხება აპროქსიმაციის პრობლემებს გრანდ ლებეგის სივრცეების ჩარჩოებში, ამ მიმართულებით ცოტა რამაა ცნობილი.

სადისერტაციო ნაშრომში შესწავლილია პერიოდულ ფუნქციათა ტრიგონომეტრიული პოლინომებით აპროქსიმაციის საკითხები, კერძოდ, დადგენილია ს.ბერნშტეინის ტერმინოლოგიით ფუნქციათა კონსტრუქციული თეორიის პირდაპირი და შებრუნებული უტოლობები ბანახის იმ არასტანდარტულ ფუნქციურ სივრცეებში, რომლებიც გადანაცვლებების მიმართ არაინვარიანტულია. ეს არჩევანი განპირობებული იყო იმით, რომ გადანაცვლებების მიმართ ინვარიანტულ სივრცეებში ტრიგონომეტრიული პოლინომების შესახებ ფუნდამენტური უტოლობები და მათზე დაფუძნებული აპროქსიმაციის ცნობილი უტოლობები L^p $(1 \leq p < \infty)$ სივრცეში ჯექსონის, ს.სტეჩკინის, ძმები ტიმანების და სხვათა მიერ დადგენილი დებულებების პირდაპირი შედეგია. მაგალითად, ბერნშტეინ-ზიგმუნდის ცნობილი უტოლობა ტრიგონომეტრიული პოლინომის წარმოებულის შესახებ გადანაცვლებების მიმართ ინვარიანტულ სივრცეში მარტივად მიიღება საინტერპოლაციო თეორემით. ასევე თუ გადანაცვლებების მიმართ ინვარიანტულ სივრცეში ძვრის ოპერატორი უწყვეტია (რაც სივრცის ნორმის აბსოლუტურად უწყვეტობის ექვივალენტურია) პირდაპირი და შებრუნებული უტოლობების მიღება პრობლემას არ წარმოადგენს (იხ.მაგალითად, დევორისა და გ.ლორენცის მონოგრაფია [11], გვ.102, 205-206). იმის გამო, რომ ჩვენ მიერ განხილული სივრცეები ისეთია, რომ ამ სივრცეებში ძვრის ოპერატორი არ არის უწყვეტი, კლასიკური უწყვეტობის მოდული ვეღარ განისაზღვრება. ნაცვლად ამისა, ჩვენ განვიხილავთ ბუტცერ-ნესელის ტიპის განზოგადებულ სიგლუვის მოდულს,

რომელიც განისაზღვრება სტეკლოვის ოპერატორის საშუალებით. რაც შეეხება გრანდ ლებეგის სივრცეებს ისინი არასეპარაბელურია. ჩვენ შევისწავლით აპროქსიმაციის ამოცანებს ამ სივრცის ქვესივრცეში, რომელიც წარმოადგენს L^p გლუვი ფუნქციების ჩაკეტვას გრანდ ლებეგის სივრცის ნორმით.

სადისერტაციო ნაშრომი ოთხი თავისაგან შედგება.

პირველი თავი შეიცავს: ცნობებს განსახილავი სივრცეების შესახებ, ცნობილ დებულებებს ამ სივრცეებში ჰარმონიული ანალიზის ინტეგრალური ოპერატორების ასახვის თვისებების შესახებ, განსაზღვრებებს და ცნობილ შედეგებს ფუნქციათა სტრუქტურული და კონსტრუქციული მახასიათებლების შესახებ. ამასთან ერთად პირველ თავში მოცემულია ზოგიერთი დამხმარე დებულების დამტკიცება.

მეორე თავი მთლიანად ეძღვნება ფუნქციათა აპროქსიმაციის საკითხებს ცვლადმაჩვენებლიან ლებეგის სივრცეებში. ამ თავში მიღებული შედეგებიდან გამოვყოფთ ისეთი შებრუნებული უტოლობების დამტკიცებას, რომელთა სხვადასხვა მხარეს სივრცის მეტრიკის მაჩვენებლები განსხვავებულია. ამ უტოლობებში გამოვლენილია ის ფაქტი, რომ განზოგადებული სიგლუვის მოდულის ნულისაკენ მისწრაფების რიგი დამოკიდებულია არამარტო საუკეთესო მიახლოებების ნულისაკენ მისწრაფების რიგზე, არამედ სივრცის მეტრიკაზე. ამასთანავე დადგენილი უტოლობები უფრო ზუსტია სივრცის მუდმივი მაჩვენებლების შემთხვევაშიც, ვიდრე ეს ადრე იყო ცნობილი. ამ თავში მიღებული შედეგებიდან აღვნიშნავთ $L^{p(\cdot)}$ სივრცეში $(\inf p(x) = 1)$ შეუღლებული ფუნქციის საუკეთესო მიახლოებების შეფასებას, აღნიშნული სივრცის იმ ქვესიმრავლის დადგენას, რომელიც ინვარიანტულია შეუღლების ოპერაციის მიმართ. აღსანიშნავია, რომ ინვარიანტობის კლასის დადგენის გზაზე ჩვენ დამტკიცებული გვაქვს ზიგმუნდის ტიპის უტოლობა შეუღლებული ფუნქციის განზოგადებული სიგლუვის მოდულის შეფასების შესახებ.

მესამე თავი ეძღვნება ფუნქციათა აპროქსიმაციის საკითხებს გრანდ ლებეგის წონიანი სივრცეების იმ ქვესივრცეში, რომელიც წარმოადგენს უსასრულოდ დიფერენცირებადი ფუნქციათა სიმრავლის ჩაკეტვას გამოსავალი სივრცის ნორმით. ამ თავში განიხილება გრანდ ლებეგის წონიანი სივრცეების ორივე შესაძლო ვარიანტი: როცა ნორმის განსაზღვრაში წონა მონაწილეობს, როგორც ზომის წარმომქმნელი ფუნქცია და, მეორე, როცა წონას უკავია მამრავლის პოზიცია. როგორც ქვემოთ არის ნაჩვენები ეს ორი სივრცე სხვადასხვა სივრცეებია. განსხვავებით ლებეგის წონიანი სივრცეებისგან, ზემოხსენებული ერთი სივრცე მეორეზე არ დაიყვანება.

მეოთხე თავში შესწავლილია თითოეული ცვლადის მიმართ 2π-პერიოდული, ორი ცვლადის ფუნქციის ტრიგონომეტრიული პოლინომებით „კუთხური მიახლოების“ საკითხი გრანდ ლებეგის წონიანი სივრცის საკმარისად გლუვი ფუნქციებით

აპროქსიმებადი ფუნქციების ქვესივრცეში. დამტკიცებულია „კუთხური“ მიახლოების პირდაპირი თეორემა. უნდა აღინიშნოს, რომ კლასიკურ ლებეგის L^p სივრცეში ორი ცვლადის პერიოდული ფუნქციების ტრიგონომეტრიული პოლინომებით „კუთხური“ მიახლოების იდეა და განხორციელება ეკუთვნის მ.პოტაპოვს (იხ. მაგალითად, [39]).

ყოველ თავს თან ახლავს შესავალი, სადაც უფრო დაწვრილებით არის გადმოცემული მისი შინაარსი.

თავი 1

ბანახის არასტანდარტული ფუნქციური სივრცეები და ინტეგრალური ოპერატორები. ფუნქციათა კონსტრუქციული და სტრუქტურული მახასიათებლები

ამ თავში მოგვყავს ბანახის მთელი რიგი არასტანდარტული ფუნქციური სივრცეების განსაზღვრებები, მათი თვისებები, აგრეთვე ცნობილი შედეგები აღნიშნულ სივრცეებში ჰარმონიული ანალიზის ძირითადი ინტეგრალური ოპერატორების ასახვის თვისებების შესახებ. თავის ბოლოს არასტანდარტული ფუნქციური სივრცეების ჩარჩოებში შემოღებულია ფუნქციათა სტრუქტურული და კონსტრუქციული მახასიათებლები და ჩამოყალიბებულია ზოგიერთი ცნობილი შედეგი მათი ურთიერთმიმართების შესახებ. აქვე ჩვენ დამტკიცებული გვაქვს ზოგიერთი დამხმარე დებულება.

§1.1 ცვლადმაჩვენებლიანი ლებეგის სივრცეები

ვთქვათ, $\Omega \subset R^n$ არის ღია შემოსაზღვრული სიმრავლე. ვიგულისხმოთ, რომ $p:\overline{\Omega} \to R^1$არის ლებეგის აზრით ზომადი ფუნქცია. იმ ზომად p ფუნქციათა სიმრავლეს, რომლისთვისაც სრულდება პირობა $1 < p_- \le p(x) \le \ p_+ < \infty$, სადაც

$$p_- = \operatorname*{ess\,inf}_{\overline{\Omega}} p(x) \ \text{ და } \ p_+ = \operatorname*{ess\,sup}_{\overline{\Omega}} p(x), \qquad (1.1.1)$$

აღვნიშნავთ $\mathbb{P}$ სიმბოლოთი. ცვლადი მაჩვენებლების სიმრავლე, რომელთათვისაც $1 \le p_- \le p(x) \le \ p_+ < \infty$, აღნიშნული იქნება $\mathbb{P}_0$ სიმბოლოთი.

Ω სიმრავლეზე განსაზღვრულ თითქმის ყველგან დადებით, ინტეგრებად w ფუნქციას ვუწოდებთ წონას.

$L^{p(.)}(\Omega, w)$-ით აღვნიშნავთ ისეთ ზომად $f:\Omega \to \mathbb{C}$ ფუნქციათა სიმრავლეს, რომელთათვისაც ნორმა

$$\|f\|_{L^{p(.)}(\Omega,w)} := \inf\{\lambda > 0 \colon \int_\Omega \left|\frac{f(x)w(x)}{\lambda}\right|^{p(x)} dx \le 1\} \qquad (1.1.2)$$

სასრულია. როცა $w \equiv 1$, მაშინ ვიხმართ აღნიშვნას $L^{p(.)}(\Omega) \coloneqq L^{p(.)}(\Omega, 1)$ და f ფუნქციის ნორმას ჩავწერთ ასე $\|f\|_{p(.)}$.

ჩვენ აგრეთვე გამოვიყენებთ აღნიშვნას $L_w^{p(.)}(\Omega)$ სივრცისათვის, რომლის ნორმაც განსაზღვრულია, როგორც

$$\|f\|_{L_w^{p(.)}} = \inf\{\lambda > 0 \colon \int_\Omega \left|\frac{f(x)}{\lambda}\right|^{p(x)} w(x)\, dx \le 1\}$$

ცვლადმაჩვენებლიანი ლებეგის სივრცეები ბანახის რეფლექსური, სეპარაბელური და გადანაცვლებების მიმართ არაინვარიანტული ფუნქციური სივრცეებია. ამ სივრცეების შესახებ იხ. მაგალითად, [8], [12]. მტკიცდება, რომ (იხ. [8], შედეგი 2.23)

$$(I_{p(.)}(f))^{\frac{1}{p+}} \leq \|f\|_{p(.)} \leq (I_{p(.)}(f))^{\frac{1}{p-}}, \text{ როცა } \|f\|_{p(.)} > 1 \tag{1.1.3}$$

და

$$(I_{p(.)}(f))^{\frac{1}{p-}} \leq \|f\|_{p(.)} \leq (I_{p(.)}(f))^{\frac{1}{p+}}, \text{ როცა } 0 < \|f\|_{p(.)} < 1 \tag{1.1.4}$$

სადაც მოდულარი $I_{p(.)}$ მოცემულია ფორმულით

$$I_{p(.)}(f) \coloneqq \int_{\Omega} |\mathrm{f(y)}|^{\mathrm{p(y)}}\, dy$$

(1.1.3)-დან გამომდინარე გვაქვს:

დებულება 1.1.1. თუ $p \in \mathbb{P}$, მაშინ $L^{p(.)}(\Omega)$ სივრცეში ნორმით კრებადობა ექვივალენტურია მოდულარით კრებადობის. ე.ი. ყოველი $f \in L^{p(.)}$ გვაქვს

$$\lim_{m\to\infty} \|f_m - f\|_{p(.)} = 0 \Leftrightarrow \lim_{m\to\infty} I_{p(.)}(f_m - f) = 0$$

შემდგომში p ფუნქციების როლში განვიხილავთ ისეთ ფუნქციებს $p{:}\,\Omega \to ₵$, რომლებიც აკმაყოფილებენ ე.წ. უწყვეტობის ლოგარითმულ პირობას

$$|p(x) - p(y)| \leq \frac{A}{-ln|x-y|}, |x-y| < \frac{1}{2}, \tag{1.1.5}$$

სადაც A მუდმივი არ არის დამოკიდებული $x, y \in \Omega$.

რადგან ჩვენ განვიხილავთ შემოსაზღვრულ სიმრავლეებს, ამიტომ (1.1.5) პირობა შეიძლება ასეც ჩავწეროთ

$$|p(x) - p(y)| \leq \frac{A_1}{\ln \frac{D}{|x-y|}}, x, y \in \Omega, D > diam\Omega$$

იმ p ფუნქციათა სიმრავლეს, რომლებიც აკმაყოფილებენ (1.1.5) პირობას აღვნიშნავთ $\mathbb{P}^{log}$ სიმბოლოთი.

ამ სივრცეებში ადგილი აქვს ჰელდერის ტიპის შემდეგ უტოლობას

დებულება 1.1.2. ვთქვათ, p, q, s ფუნქციები მიეკუთვნებიან $\mathbb{P}$ კლასს. თუ

$$\frac{1}{s(y)} = \frac{1}{p(y)} + \frac{1}{q(y)}$$

თითქმის ყველა $y \in \Omega$-სთვის, მაშინ ადგილი აქვს უტოლობას

$$\|fg\|_{s(.)} \leq 2\|f\|_{p(.)}\|g\|_{q(.)} \tag{1.1.6}$$

აღნიშნულ უტოლობას ადგილი აქვს უფრო ფართო კლასის მაჩვენებლებისათვის ([12] გვ. 81), თუმცა ჩვენი მიზნებისთვის ესეც საკმარისი იქნება.

როცა p მაჩვენებელი მუდმივია, მაშინ როგორც ცნობილია რისის წარმოდგენადობის თეორემის ძალით გვაქვს

$$\|f\|_p = \sup_{\|g\|_{p'}\le 1}\left|\int_\Omega f(x)g(x)dx\right|$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$\|f\|^*{}_{p(.)} = \sup_{\|g\|_{p'(.)}\le 1}\left|\int_\Omega f(x)g(x)dx\right|$$

ან

$$\|f\|^*{}_{p(.)} = \sup_{\|g\|_{p'(.)}\le 1}\int_\Omega |f(x)g(x)|dx \qquad (1.1.7)$$

სადაც $p'(x) = \frac{p(x)}{p(x)-1}$.

ორივე ამ ნორმისთვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$\|f\|_{p(.)} \le \|f\|^*_{p(.)} \le 2\|f\|_{p(.)} \qquad (1.1.8)$$

მარჯვენა უტოლობაში მუდმივი 2 შეიძლება შეიცვალოს უფრო ნაკლები მუდმივით.

ამ ფაქტზე დაყრდნობით მარტივად შეიძლება გამოვიყვანოთ მინკოვსკის ტიპის უტოლობა ცვლადმაჩვენებლიანი ლებეგის სივრცეებისთვის.

ვთქვათ, $p \in \mathbb{P}$, მაშინ

$$\left\|\int_\Omega f(.,y)dy\right\|_{p(.)} \le 2\int_\Omega \|f(.,y)\|_{p(.)}dy \qquad (1.1.9)$$

მართლაც, (1.1.7) ნორმისთვის მისი განსაზღვრისა და ფუბინის თეორემის ძალით გვაქვს

$$\left\|\int_\Omega f(.,y)dy\right\|^*_{p(.)} \le \int_\Omega \|f(.,y)\|^*{}_{p(.)}dy$$

ამ უკანასკნელი უტოლობიდან და (1.1.8) დან გამომდინარეობს (1.1.9).

§1.2 გრანდ ლებეგის სივრცეები და მათი წონიანი ანალოგები

ამ პარაგრაფში მოყვანილია ერთ-ერთი არასტანდარტული ბანახის ფუნქციური სივრცის მიმოხილვა, რომლის ჩარჩოებშიც შემდგომ პარაგრაფებში შესწავლილი იქნება პერიოდულ ფუნქციათა ტრიგონომეტრიული პოლინომებით მიახლოების საკითხები.

გრანდ ლებეგის $L^{p)}$ სივრცეები შემოღებულ იქნა ტ. ივანიეცისა და კ. სბორდონეს მიერ 1992 წელს და დღეისათვის ისინი წარმოადგენენ თანამედროვე ანალიზის ერთ-ერთ ინტენსიურად კვლევად ობიექტებს. მათი შემოღება განპირობებული იყო გამოყენებების მოთხონილებებით სხვადასხვა მიმართულებით. მაგალითად, მინიმალურ მოთხოვნებში იაკობიანის ინტეგრებადობის საკითხების გამოკვლევებში. ეს სივრცეები სწორედ ის სივრცეებია, სადაც ეფექტურად არის შესაძლებელი ფართო კლასის არაწრფივი დიფერენციალური განტოლებების ამოხსნადობისა და ამონახსნთა ერთადერთობისა და რეგულარობის დადგენა. ჩვენ განვიხილავთ გრანდ ლებეგის სივრცეებს იმ ზოგადი დასმით, რომელიც მოგვიანებით შემოთავაზებული იყო ლ. გრეკოს, ტ. ივანიეცისა და კ. სბორდონეს [15] მიერ არა-ჰომოგენური n-ჰარმონიული განტოლების $A(x,\nabla u)=\mu$ ამოხსნადობისა და ამონახსნთა ერთადერთობის დადგენის მიზნით.

განსაზღვრა 1.2.1. ვთქვათ, (X,μ) არის სივრცე სასრული ზომით, $\varphi\colon R^+\to R^+$ არის დადებითი შემოსაზღვრული ფუნქცია პირობით $\lim_{t\to 0}\varphi(t)=0$ და $p\in(1,\infty)$.

გრანდ ლებეგის წონიანი $L_w^{p),\varphi}(X,\mu)$ სივრცე განისაზღვრება როგორც იმ ზომად (საზოგადოდ, კომპლექსურ მნიშვნელობებიან) ფუნქციათა სივრცე, რომლისთვისაც ნორმა

$$\|f\|_{L_w^{p),\varphi}(X,\mu)}=\sup_{0<\varepsilon<p-1}\left(\varphi(\varepsilon)\int_X|f(x)|^{p-\varepsilon}w(x)d\mu\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}\qquad(1.2.1)$$

სასრულია.

ამ სივრცეებისათვის ყოველი $\varepsilon\in(0,p-1)$-სათვის მართებულია შემდეგი უწყვეტი ჩართვები

$$L_w^{p}(X,\mu)\hookrightarrow L_w^{p),\varphi}(X,\mu)\hookrightarrow L_w^{p-\varepsilon}(X,\mu)\qquad(1.2.2)$$

როცა სივრცე განსაზღვრულია ღია შემოსაზღვრულ Ω სიმრავლეზე განსაზღვრული ლებეგის ზომის მიმართ, მაშინ μ სიმბოლოს გამოვტოვებთ და გამოვიყენებთ აღნიშვნას $L_w^{p),\varphi}(\Omega)$. თუ $\varphi(\varepsilon)=\varepsilon$, მაშინ გვაქვს თავდაპირველად შემოღებული ივანიეც-სბორდონეს $L^{p)}$ სივრცე, ხოლო როცა $\varphi(\varepsilon)=\varepsilon^\theta,\theta>0$, მაშინ გრანდ ლებეგის სივრცის აღსანიშნავად გამოვიყენებთ $L_w^{p),\theta}(\Omega)$ სიმბოლოს.

შევნიშნოთ, რომ ფუნქცია $f(x) = x^{-\frac{1}{p}}, 1 < p < \infty$, ეკუთვნის $L^{p)}(0,1)$ სივრცეს, მაგრამ არ ეკუთვნის $L^{p}(0,1)$ -ს.

უფრო მეტიც,მართებულია შემდეგი

დებულება 1.2.1. ვთქვათ, $1 < p < \infty$. ყოველი წონისათვის

$$w(x) = x^{\alpha}, -1 < \alpha < p - 1,$$

არსებობს ისეთი $f_0(x)$ ფუნქცია, რომ $f_0 \in L_w^{p)}(0,1)$ და $f_0 \notin L_w^{p}(0,1)$

დამტკიცება. ვთქვათ, $w(x) = x^{-\beta}, 0 < \beta < 1$ დავუშვათ, $f_0(x) = x^{\frac{\beta-1}{p}}$ ცხადია, რომ $f_0 \notin L_w^{p}(0,1)$. მეორეს მხრივ,

$$\sup_{0<\varepsilon<p-1} (\varepsilon \int_0^1 x^{\frac{(\beta-1)(p-\varepsilon)}{p}} \cdot x^{-\beta}\, dx)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} = \frac{p}{1-\alpha} < \infty$$

ე.ი. $f_0 \in L_w^{p)}(0,1)$.

ახლა, ვთქვათ, $w(x) = x^{\alpha}, 0 < \alpha < p - 1$ და $f_0(x) = x^{\frac{-1-\alpha}{p}}$ გვაქვს $f_0 \notin L_w^{p}(0,1)$. ამავე დროს,

$$\sup_{0<\varepsilon<p-1} (\varepsilon \int_0^1 x^{-\frac{(1+\alpha)(p-\varepsilon)}{p}} \cdot x^{\alpha}\, dx)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} = \frac{p}{1+\alpha} < \infty$$

ე.ი. $f_0 \in L_w^{p)}(0,1)$.

$L_w^{p),\varphi}(\Omega)$ სივრცეები არის არარეფლექსური, არასეპარაბელური და გადანაცვლებების მიმართ არაინვარიანტული ბანახის ფუნქციური სივრცეები. უსასრულოდ დიფერენცირებად ფუნქციათა ჩაკეტვა $L_w^{p),\theta}$ სივრცის ნორმით არ ემთხვევა $L_w^{p),\theta}$ სივრცეს. ეს ჩაკეტვა წარმოადგენს $L_w^{p),\theta}$ სივრცის ქვესივრცეს, რომლის ელემენტებიც ხასიათდებიან პირობით

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{\theta} \int_0^1 |f(x)|^{p-\varepsilon} w(x)dx = 0 \qquad (1.2.3)$$

ამ ქვესივრცეს ჩვენ აღვნიშნავთ $\tilde{L}^{p),\theta}$ სიმბოლოთი.

მაგალითად, ფუნქცია

$$g_{\lambda}(x) = x^{-\frac{1}{p}} ln^{\lambda} \frac{e}{x}$$

ეკუთვნის $L^{p),\theta}(0,1)$ სივრცეს, მაგრამ $g_\lambda \notin \tilde{L}^{p),\theta}$, როცა $\lambda = \frac{\theta-1}{p}$. საზოგადოდ, ადგილი აქვს შემდეგ მიმართებებს:

$$g_\lambda \in L^{p),\theta}(0,1) \Leftrightarrow \lambda \leq \frac{\theta-1}{p}$$

$$g_\lambda \in \tilde{L}^{p),\theta}(0,1) \Leftrightarrow \lambda < \frac{\theta-1}{p}$$

გადმოცემის სისრულისათვის ქვემოთ მოგვყავს უფრო ზოგადი ფაქტის დამტკიცება

დებულება 1.2.2. ვთქვათ, $\Omega \subset R^n$ არის შემოსაზღვრული ღია სიმრავლე, $\varphi: R^+ \to R^+$ არის სასრული, არაკლებადი ფუნქცია ისეთი, რომ $\lim_{t\to 0+} \varphi(t) = 0$ და $1 < p < \infty$. მაშინ $C_0^\infty(\Omega)$ სიმრავლის ჩაკეტვა $L_w^{p),\varphi}(\Omega)$ სივრცის ნორმით არის ამ სივრცის ის ქვესიმრავლე, რომელიც ხასიათდება პირობით

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varphi(\varepsilon) \int_\Omega |f(x)|^{p-\varepsilon} w(x) dx = 0 \qquad (1.2.4)$$

დამტკიცება. ვთქვათ, $\{f_k\}_{k\in N}$ არის $C_0^\infty(\Omega)$ სიმრავლის ფუნქციათა ისეთი მიმდევრობა,რომლისთვისაც

$$\lim_{k\to\infty} \|f - f_k\|_{L_w^{p),\varphi}(\Omega)} = 0$$

მაშინ ფიქსირებული $\delta > 0$-ისთვის არსებობს ისეთი $N = N(\delta)$, რომ როცა $k \geq N$ გვაქვს

$$\|f - f_k\|_{L_w^{p),\varphi}} < \frac{\delta}{2}$$

ჰელდერის უტოლობის ძალით გვაქვს

$$(\varphi(\varepsilon) \int_\Omega |f_k(x)|^{p-\varepsilon} w(x) dx)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \leq \left(\varphi(\varepsilon)\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} (w\Omega)^{\frac{1}{p-\varepsilon}-\frac{1}{p}} (\int_\Omega |f_k(x)|^p w(x) dx)^{\frac{1}{p}} \to 0$$

როცა $\varepsilon \to 0$. ჩვენ შეგვიძლია ავარჩიოთ ისეთი ε_0, რომ როცა $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ ადგილი ექნება უტოლობას

$$(\varphi(\varepsilon) \int_\Omega |f_k(x)|^{p-\varepsilon} w(x) dx)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} < \frac{\delta}{2}$$

ამგვარად,

$$\left(\varphi(\varepsilon)\int_{\Omega}|f(x)|^{p-\varepsilon}w(x)dx\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \le \left(\varphi(\varepsilon)\int_{\Omega}|f(x)-f_k(x)|^{p-\varepsilon}w(x)dx\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} +$$

$$(\varphi(\varepsilon)\int_{\Omega}|f_k(x)|^{p-\varepsilon}w(x)dx)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \le \|f-f_k\|_{L_w^{p),\varphi}} + \frac{\delta}{2} < \delta$$

ნებისმიერი ε-ისთვის, $0<\varepsilon<\varepsilon_0$.

დებულება დამტკიცებულია.

შენიშვნა. თუ φ ფუნქციისგან მოვითხოვთ დამატებით პირობას $\varphi(\varepsilon)=o(\boldsymbol{\varepsilon})$ როცა $\varepsilon\to 0$, მაშინ ისევე, როგორც $\tilde{L}^{p),\theta}$ არის $L^{p),\theta}$ სივრცის წესიერი ნაწილი, ასევე $\tilde{L}^{p),\varphi}$ წარმოადგენს $L^{p),\varphi}$ სივრცის წესიერ ნაწილს. მართლაც ვთქვათ, $y\in\Omega$ და ბურთი $B(y,r)\subset\Omega$. ვთქვათ, $f(x):=|x-y|^{-\frac{n}{p}}$, მაშინ

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(\varphi(\varepsilon)\int_{\Omega}|f(x)|^{p-\varepsilon}dx) \ge \lim_{\varepsilon\to 0}(\varphi(\varepsilon)\int_{B(y,r)}|f(x)|^{p-\varepsilon}dx) = \lim_{\varepsilon\to 0}c(p,n)\frac{\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon}r^{\frac{n\varepsilon}{p}} \ne 0$$

ამიტომ, $f\notin\tilde{L}^{p),\varphi}(\Omega)$.

ზემოთ გრანდ ლებეგის წონიანი სივრცის ნორმის განსაზღვრაში წონა განიხილებოდა როგორც ზომა. ჩვენი შესწავლის საგანი იქნება აგრეთვე ტრიგონომეტრიული პოლინომების შესახებ ფუნდამენტური უტოლობები და მათი გამოყენება პერიოდულ ფუნქიათა აპროქსიმატული თვისებების დასადგენად გრანდ ლებეგის წონიან სივრცეებში, როცა ნორმის განსაზღვრაში წონა მონაწილეობს როგორც მამრავლი. უნდა შევნიშნოთ, რომ გრანდ ლებეგის სივრცეების ნორმებში წონების სხვადასხვა პოზიციები იძლევა კლასიკური ლებეგის სივრცეებიდან არსებითად განსხვავებულ სურათებს. როგორც ცნობილია ლებეგის სივრცეებში მოცემული წონითი w ფუნქციისათვის f ეკუთვნის ლებეგის წონიან სივრცეს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $fw^{1/p}\in L^p$. ეს ექვივალენტობა ირღვევა გრანდ ლებეგის სივრცეებში. მოვიყვანოთ მაგალითი (იხ. [14])

ვთქვათ, $w(x)=x^{\alpha},\alpha>0$. თუ $f(x)=x^{\beta},\beta>-\alpha-1$ მაშინ $f\in L_w^{p)}(0,1)$. მეორეს მხრივ, თუ $0<\varepsilon<p-1$, მაშინ $\left(fw^{\frac{1}{p}}\right)^{p-\varepsilon}=x^{\left(\beta+\frac{\alpha}{p}\right)(p-\varepsilon)}$. აქ თუ ავიღებთ $\beta<-1-\frac{\alpha}{p}$, მაშინ $x-$ ის ხარისხი გახდება $(-1)-$ზე ნაკლები. ამიტომ $\left(fw^{\frac{1}{p}}\right)^{p-\varepsilon}\notin L(0,1)$ და, მაშასადამე, $fw^{\frac{1}{p}}\notin \mathrm{L}^{p)}(0,1)$.

ვთქვათ, $1 < p < \infty$ და $\theta > 0$ გრანდ ლებეგის წონიანი სივრცის ის ვარიანტი, როცა ნორმის განსაზღვრაში წონა მონაწილეობს როგორც მამრავლი განისაზღვრება, როგორც

$$\mathcal{L}_w^{p),\theta}(\mathbb{T}) = \left\{f : \|fw\|_{L_w^{p),\theta}} < +\infty\right\}$$

სადაც

$$\|fw\|_{L_w^{p),\theta}} = \sup_{0<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{\theta}{p-\varepsilon}} \|fw\|_{L^{p-\varepsilon}}$$

$\mathcal{L}_w^{p),\theta}$ წარმოადგენს არარეფლექსურ, არასეპარაბელურ და გადანაცვლების მიმართ არაინვარიანტულ ბანახის ფუნქციურ სივრცეს. იმ წონიანი ლებეგის სივრცის ჩაკეტვა, რომელიც განსაზღვრულია ნორმით $\|f\|_{L_w^p} < \infty$, $\mathcal{L}_w^{p),\theta}$ სივრცის ნორმით არ ემთხვევა $\mathcal{L}_w^{p),\theta}$ სივრცეს. ეს ჩაკეტვა შეიცავს ფუნქციებს, რომელთათვისაც

$$\lim_{\varepsilon\to\infty} \varepsilon^{\theta} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)w(x)|^{p-\varepsilon}\, dx = 0$$

აღნიშნული ქვესივრცე შემდგომში აღნიშნული იქნება $\tilde{\mathcal{L}}_w^{p),\theta}$ სიმბოლოთი.

§1.3 ცვლადმაჩვენებლიანი გრანდ ლებეგის სივრცეები

ამ პარაგრაფში ჩვენ მიმოვიხილავთ ბანახის ახალ ფუნქციურ სივრცეებს, რომლებიც შემოღებული იყო ვ.კოკილაშვილის და ა.მესხის მიერ [23]. ეს სივრცეები აერთიანებენ ორ არასტანდარტულ ბანახის ფუნქციურ სივრცეს: ცვლადმაჩვენებლიან ლებეგისა და გრანდ ლებეგის სივრცეებს.

ვთქვათ, Ω არის n-განზომილებიანი ევკლიდური სივრცის ღია შემოსაზღვრული სიმრავლე. ვიგულისხმოთ, რომ $p(x)$ არის $\overline{\Omega}$-ზე განსაზღვრული უწყვეტი ნამდვილი ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს ლოგარითმულ პირობას

$$|p(x) - p(y)\,| \le \frac{A}{-ln|x-y|}, |x-y| < \frac{1}{2}$$

სადაც A მუდმივი არ არის დამოკიდებული x -ზე და y -ზე. ეს კლასი, როგორც წინა პარაგრაფში აღნიშნული იქნება $\mathbb{P}^{log}$. როგორც ადრე, $\mathbb{P}$ -თი აღნიშნული იქნება ისეთი $p(x)$ ფუნქციათა სიმრვლე, რომელთათვისაც $1 < p_- \le p(x) \le\ p_+ < \infty$.

ქვემოთ ვიგულისხმებთ, რომ $p \in \mathbb{P} \cap \mathbb{P}^{log}(\overline{\Omega})$. მოცემული $\theta > 0$ რიცხვისთვის $L^{p(\cdot),\theta}(\Omega)$-თი აღვნიშნავთ Ω არეზე ზომად ისეთ ფუნქციათა სიმრავლეს, რომლისთვისაც

$$\|f\|_{L^{p(.),\theta}} = \sup_{0<\varepsilon<p_- -1} \varepsilon^{\frac{\theta}{p_- -\varepsilon}} \|f\|_{L^{p(.)-\varepsilon}} < +\infty$$

დებულება 1.3.1. ჩვენ გვაქვს,რომ

1)$L^{p(.),\theta}$ არის სრული სივრცე

2)$L^{p(.)}$ სივრცის ჩაკეტვა $L^{p(.),\theta}$ სივრცეში წარმოადგენს $L^{p(.),\theta}$ სივრცის ისეთ ქვესივრცეს, რომლის ფუნქციებისათვის შესრულებულია პირობა

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{\frac{\theta}{p_- -\varepsilon}} \|f(.)\|_{L^{p(.)-\varepsilon}} = 0$$

ამ დებულების დამტკიცება იხ. [23].

დებულება 1.3.2. ვთქვათ, $p \in \mathbb{P}$. მაშინ შემდეგ უწყვეტ ჩართვებს აქვს ადგილი.

$$L^{p(.)} \hookrightarrow L^{p(.),\theta} \hookrightarrow L^{p(.)-\varepsilon}, 0 < \varepsilon < p_- - 1$$

აღნიშნული ჩართვების მართებულობა უშუალოდ მოწმდება.

§1.4 ჰარმონიული ანალიზის ინტეგრალური ოპერატორები ბანახის არასტანდარტულ ფუნქციურ სივრცეებში

ფუნქციათა აპროქსიმაციის პრობლემები მჭიდროდ არის დაკავშირებული ჰარმონიული ანალიზის ფუნდამენტური ინტეგრალური ოპერატორების ასახვის თვისებებთან. ამ პარაგრაფში მოყვანილი იქნება ჰარდი-ლიტვლვუდის მაქსიმალური ოპერატორის, სინგულარული ოპერატორისა და წილადური ინტეგრალური ოპერატორის შემოსაზღვრულობის შესახებ ზოგიერთი ცნობილი დებულება (იხ.[14],[18],[24],[19],[28]).

ვთქვათ, $\mathbb{T} = [-\pi, \pi]$ და $p(x)$ არის 2π- პერიოდული მთელ ღერძზე უწყვეტი ფუნქცია, რომელიც მიეკუთვნება $\mathbb{P} \cap \mathbb{P}^{log}$ კლასს. განვიხილოთ შემდეგი ინტეგრალური ოპერატორები: ჰარდი-ლიტლვუდის მაქსიმალური ფუნქცია

$$Mf(x) = \sup_{|t|\le\pi} \frac{1}{t} \int_0^t |f(x+u)|\, du \qquad (1.4.1)$$

და შეუღლებული ფუნქცია

$$\tilde{f}(t) = -\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta})\, ctg\frac{t-\theta}{2} d\theta \qquad (1.4.2)$$

[23] ნაშრომში დამტკიცებულია შემდეგი დებულებები:

დებულება 1.4.1. ვთქვათ, $p \in \mathbb{P} \cap \mathbb{P}^{log}, \theta > 0$, მაშინ M ოპერატორი შემოსაზღვრულია $L^{p(.),\theta}(\mathbb{T})$ სივრცეში.

დებულება 1.4.2. ვთქვათ, Γ არის კომპლექსური სიბრტყის გაწრფევადი, სასრული სიგრძის ჩაკეტილი წირი, რომელიც აკმაყოფილებს კარლესონის პირობას

$$|\Gamma \cap B(z,r)| \leq cr, 0 < r < diam\Gamma$$

სადაც $z \in \Gamma$ და $B(z,r)$ აღნიშნავს ბურთს, ცენტრით z წერტილში და რადიუსით r, დადებითი c მუდმივი არ არის დამოკიდებული z -ზე და r -ზე. მაშინ კოშის სინგულარული ინტეგრალი

$$Sf(t) = \int_{\Gamma} \frac{f(\tau)}{\tau - t} d\tau$$

შემოსაზღვრულია $L^{p(.),\theta}(\Gamma)$ სივრცეში. ამ უკანასკნელი დებულებიდან გამომდინარეობს

დებულება 1.4.3. ვთქვათ, $p \in \mathbb{P} \cap \mathbb{P}^{log}, \theta > 0$, მაშინ შეუღლებული ოპერატორი $f \to \tilde{f}$ იქნება შემოსაზღვრული $L^{p(.),\theta}$ სივრცეში.

დამტკიცება. წინა დებულების ძალით ოპერატორი

$$Sf(e^{it}) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{if(e^{i\theta})}{e^{i\theta} - e^{it}} d\theta$$

შემოსაზღვრულია $L^{p(.),\theta}$ სივრცეში. ამავე დროს,

$$ctg\frac{u}{2} = \frac{(e^{iu}+1)i}{e^{iu}-1}, u \in \mathbb{T}$$

ამიტომ

$$\left|\frac{1}{2}\frac{(e^{iu}+1)i}{e^{iu}-1} - \frac{i}{e^{iu}-1}\right| = \left|\frac{-2i + (e^{iu}+1)i}{2(e^{iu}-1)}\right| = \left|\frac{e^{iu}i - i}{2(e^{iu}-1)}\right| = \frac{1}{2}$$

აქედან გამომდინარეობს $f \to \tilde{f}$ ოპერატორის შემოსაზღვრულობა $L^{p(.),\theta}(\mathbb{T})$ სივრცეში.

შევნიშნოთ, რომ შეუღლებული ოპერატორის შემოსაზღვრულობა $L^{p(.)}$ სივრცეში, როცა $p \in \mathbb{P} \cap \mathbb{P}^{log}$ გამომდინარეობს კალდერონ-ზიგმუნდის ამავე სივრცეში შემოსაზღვრულობიდან, რაც დადგენილია [12] მონოგრაფიაში. ჩვენ დაგვჭირდება აგრეთვე გრანდ ლებეგის წონიან სივრცეებში შეუღლებული ფუნქციის შემოსაზღვრულობა. შესაბამისი დებულების ჩამოსაყალიბებლად მოვიყვანოთ წონების

ერთი კლასის განსაზღვრა, რომელიც შემოღებული იყო ბ.მაკენჰაუპტის [34] მიერ და ცნობილია მაკენჰაუპტის A_p კლასის სახელწოდებით.

განსაზღვრა 1.4.1. ამბობენ, რომ 2π პერიოდული წონითი ფუნქცია w ეკუთვნის მაკენჰაუპტის A_p კლასს ($1 < p < \infty$), თუ შესრულებულია პირობა

$$\sup_I \left(\frac{1}{|I|} \int_I w(x)\,dx \right) \left(\frac{1}{|I|} \int_I w^{1-p'}(x)\,dx \right)^{p-1} < \infty, \quad (1.4.3)$$

სადაც ზუსტი ზედა საზღვარი აიღება ნებისმიერი I ინტერვალის მიმართ, რომლის სიგრძე არ აღემატება 2π-ს.

A_p კლასები ღიაა. ეს იმას ნიშნავს, რომ თუ $w \in A_p$, მაშინ მოიძებნება ისეთი $p_0 < p$, რომ $w \in A_{p_0}$ და $w \in A_{p_1}$, ყოველი $p_1 > p$.

დებულება 1.4.4. ვთქვათ $1 < p < \infty$, და , $\theta > 0$. იმისათვის, რომ შეუღლებული ოპერატორი $f \to \tilde{f}$ იყოს შემოსაზღვრული $L_w^{p),\theta}(\mathbb{T})$ კლასში აუცილებელი და საკმარისია, რომ $w \in A_p$.

ანალოგიური დებულება მართებულია ამ პარაგრაფის დასაწყისში განსაზღვრული ჰარდი-ლიტლვუდის მაქსიმალური ფუნქციებისთვისაც. დებულება 1.4.4. სასრულ ინტერვალზე განსაზღვრული კალდერონის კომუტატორისთვის (კერძოდ, სასრული ჰილბერტის გარდაქმნისათვის) დამტკიცებულია [18] ნაშრომში. ამ ფაქტიდან გამომდინარეობს დებულება 1.4.4 - ის მართებულობა. თუ გავითვალისწინებთ დებულება 1.5.3-ის დამტკიცებას.

განვიხილოთ წილადური ინტეგრალები

$$I_\alpha f(x) = \int_J \frac{f(y)}{|x-y|^{1-\alpha}}\,dy\,, \quad 0 < \alpha < 1\,, \qquad (1.4.4)$$

სადაც J შემდგომში იქნება ან ყველა ნამდვილ რიცხვთა სიმრვლე, ან იქნება მთელი ღერძის რაიმე სასრული სიგრძის ქვეინტერვალი.

მოვიყვანოთ კლასიკური ლებეგის წონიანი სივრცეებისათვის წილადური ინტეგრალური ოპერატორების შემოსაზღვრულობის ცნობილი კრიტერიუმი, რომელიც ეკუთვნის ბ.მაკენჰაუპტის და რ.ლ.უიდენს [35].

დებულება 1.4.5. ვთქვათ,$1 < p < \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \alpha$, მაშინ იმისათვის, რომ მართებული იყოს უტოლობა

$$(\int_{-\infty}^{\infty} |I_\alpha f(x)|^q w^q(x)dx)^{\frac{1}{q}} \leq c(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p w^p(x)dx)^{\frac{1}{p}}, \qquad (1.4.5)$$

სადაც დადებითი c მუდმივი არ არის დამოკიდებული f -ზე, აუცილებელი და საკმარისია შემდეგი პირობის შესრულება

$$(\int_I \frac{1}{|I|} w^q(x)dx)^{\frac{1}{q}}(\frac{1}{|I|}\int_I w^{1-p'}(x)dx)^{\frac{1}{p}} \leq c_1|I|^{1-\alpha} \qquad (1.4.6)$$

სადაც c არ არის დამოკიდებული $I \subset \mathbb{R}$ ინტერვალზე.

იმ წონების სიმრავლეს, რომლებიც (1.4.6) პირობას აკმაყოფილებენ აღვნიშნავთ $\mathbb{A}_{p,q}$ სიმბოლოთი.

ჩვენ მომავალში დაგვჭირდება აგრეთვე წილადური ინტეგრალური ოპერატორის ასახვის თვისებები ბანახის სხვა არასტანდარტულ ფუნქციურ სივრცეებში. მაგალითად, [31] ნაშრომში დამტკიცებული იყო შემდეგი დებულების მართებულობა.

დებულება 1.4.6. ვთქვათ J-სასრული სიგრძის ინტერვალია, $p \in \mathbb{P} \cap \mathbb{P}^{log}$ და $p_+ < \frac{1}{\alpha}$. მაშინ I_αოპერატორი შემოსაზღვრულია $L^{p(.)}(J)$ სივრციდან $L^{q(.)}(J)$ სივრცეში, სადაც $\frac{1}{q(x)} = \frac{1}{p(x)} - \alpha$.

ეს უკანასკნელი დებულება არის ჰარდი-ლიტლვუდ-სობოლევის ცნობილი ჩადგმის თეორემის ანალოგი.

და ბოლოს მოვიყვანოთ ზემოხსენებული ჩართვის ტიპის თეორემა გრანდ ლებეგის წონიან სივრცეებში [24].

დებულება 1.4.7. ვთქვათ, J სასრული სიგრძის ინტერვალია. თუ $1 < p < \frac{1}{\alpha}$, $q = \frac{p}{1-\alpha p}$ და $\theta > 0$, მაშინ იმისათვის, რომ არსებობდეს დადებითი მუდმივი c ისეთი, რომ ნებისმიერი $f \in L^{p),\theta}$ ფუნქციისათვის მართებული იყოს უტოლობა

$$\|I_\alpha(fw^\alpha)\|_{L^{q),\theta q/p}(J)} \leq c\|f\|_{L^{p),\theta}(J)}$$

აუცილებელი და საკმარისია, რომ $w \in A_{1+\frac{q}{p'}}$.

ზემოხსენებულ შრომაში ნაჩვენებია, რომ I_α ოპერატორი არ არის შემოსაზღვრული $L^{p),\theta}$ სივრციდან $L^{q),\theta_1}$ სივრცეში არც ერთი $\theta_1 < \theta q/p$-სათვის და, მაშასადამე, სობოლევის ტიპის $L^{p),\theta} \to L^{q),\theta}$ უტოლობას ადგილი არ აქვს.

შემდგომში ჩვენ მიერ გამოყენებული იქნება ა.კალდერონისა და ა.ზიგმუნდის [6] საინტერპოლაციო თეორემა ნახევრადწრფივი ოპერატორებისთვის.

დებულება 1.4.8. ვთქვათ, T არის ნახევრადწრფივი ოპერატორი განსაზღვრული $L^{p_o} + L^{p_1}$ სივრცეზე. თუ T ოპერატორი ერთდროულად შემოსაზღვრულია L^{p_o} და L^{p_1} სივრცეში სათანადო $\|T\|_{L^{p_o} \to L^{p_o}}, \|T\|_{L^{p_1} \to L^{p_1}}$ ოპერატორული ნორმებით, მაშინ T შემოსაზღვრულია ყოველ L^p სივრცეში, პირობით

$$\frac{1}{p} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1}, 0 < t < 1$$

და ადგილი აქვს უტოლობას

$$\|T\|_{L^p \to L^p} \leq \|T\|_{L^{p_o} \to L^{p_0}}^{1-t} \cdot \|T\|_{L^{p_1} \to L^{p_1}}^{t}.$$

წრფივი ოპერატორებისათვის მოყვანილი დებულება ლიტერატურაში ცნობილია, როგორც რისი-ტორინის თეორემა (იხ. მაგალითად, [53], თავი XX, თეორემა 1.11)

შემდგომში ერთიდაიგივე c სიმბოლოთი აღნიშნული იქნება მუდმივები, რომლებსაც შეიძლება სხვადასხვა მნიშვნელობები ჰქონდეთ, მთავარია, რომ ეს მუდმივები არ იქნება დამოკიდებული ფუნქციაზე და n-ზე. როდესაც დამტკიცებაში ლაპარაკი იქნება ერთიდაიგივე სივრცეზე, ნორმაში სივრცე შეიძლება არ იყოს მითითებული.

§1.5 ფუნქციათა კონსტრუქციული და სტრუქტურული მახასათებლების შესახებ ბანახის არასტანდარტული ფუნქციური სივრცეების ჩარჩოებში

დისერტაციაში ჩვენი განხილვის საგანია 2π-პერიოდული ფუნქციების ტრიგონომეტრიული პოლინომებით მიახლოების საკითხები. შემდგომში τ_n-ით აღვნიშნავთ ყველა ისეთი ტრიგონომეტრიული პოლინომების სიმრავლეს, რომლის რიგი არ აღემატება n-ს. Γ —თი აღნიშნული იქნება ერთ-ერთი შემდეგი სივრცე $L^{p(\cdot)}(\mathbb{T}), L_w^{p(\cdot)}(\mathbb{T}), L^{p(\cdot)}(w,\mathbb{T}),\ L^{p),\theta}, L_w^{p),\theta}, L^{p(\cdot),\theta}$. $\tilde{\Gamma}$ —თი აღვნიშნავთ ტრიგონომეტრიულ პოლინომთა სიმრავლის ჩაკეტვას Γ სივრცის ნორმით. როგორც უკვე იყო ნათქვამი, პირველი სამი სივრცის შემთხვევაში ეს ჩაკეტვები ემთხვევა თვით Γ —ს, ხოლო ბოლო სამი სივრცის შემთხვევაში მის ჩაკეტილ ქვესივრცეს წარმოადგენენ. მოვიგონოთ, მაგალითად, რომ $\tilde{L}_w^{p),\theta}$ წარმოადგენს L_w^p სივრცის ჩაკეტვას $L_w^{p),\theta}$ სივრცის ნორმით, რომელიც, როგორც უკვე აღნიშნული იყო, არ ემთხვევა $L_w^{p),\theta}$ სივრცეს.

$S_n(x,f)$ —ით აღვნიშნავთ $\tilde{\Gamma}$ სივრცის ელემენტის ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივის კერძო ჯამებს.იმის გამო, რომ ნებისმიერი $f \in \tilde{\Gamma}$ და $\varepsilon > 0$ რიცხვებისათვის მოიძებნება ისეთი ტრიგონომეტრიული პოლინომი, $t(x)$რომ

$$\|f - t\|_\Gamma < \varepsilon$$

სტანდარტული გზით (იხ. მაგალითად, [53], თავი 7, პარაგრაფი 6.4) დავასკვნით, რომ

$$\|S_n(\cdot,f)\|_\Gamma \le c\|f\|_\Gamma \qquad (1.5.1)$$

სადაც დადებითი c არ არის დამოკიდებული f და $n-$ ზე, საიდანაც გვაქვს,

$$\lim_{n\to\infty}\|S_n(\cdot,f)-f\|_\Gamma = 0$$

ყოველი $f \in \tilde{\Gamma}$ ფუნქციისათვის $E_n(f)_\Gamma$ $-$ით აღვნიშნოთ n რიგის საუკეთესო მიახლოება ტრიგონომეტრიული პოლინომებით

$$E_n(f)_\Gamma = \inf_{t_k\in\tau_n}\|f-T_k\|_\Gamma$$

ცხადია, რომ ყოველი $f \in \tilde{\Gamma}$ გვაქვს

$$\lim_{n\to\infty}E_n(f)_\Gamma = 0$$

დებულება 1.5.1. ყოველი $f \in \tilde{\Gamma}$ ფუნქციისათვის შემდეგ ჯაჭვ-უტოლობას აქვს ადგილი

$$E_n(f)_\Gamma \le \|f-S_n(\cdot,f)\|_\Gamma \le cE_n(f)_\Gamma,$$

სადაც c მუდმივი არ არის დამოკიდებული f $-$ზე და n $-$ზე.დამტკიცება არის სტანდარტული. ვთქვათ t_n არის f ფუნქციის საუკეთესო მიახლოების პოლინომი

$$E_n(f)_\Gamma = \|f-t_n\|_\Gamma.$$

ასეთი პოლინომის არსებობა გარანტირებულია ცნობილი ზოგადი ხასიათის დებულებით (იხ. [51], პარაგრაფი 2.2).

მაშინ (1.5.1)-ის ძალით გვექნება

$$\|f-S_n(\cdot,f)\|_\Gamma \le \|f-t_n\|_\Gamma + \|S_n(t_n-f)\|_\Gamma \le cE_n(f)_\Gamma$$

სანამ გადავიდოდეთ ფუნქციათა სტრუქტურული მახასიათებლების განსაზღვრაზე შევნიშნოთ, რომ $\tilde{\Gamma}$ ინვარიანტულია შეუღლების ოპერაციის მიმართ. მაგალითისათვის განვიხილოთ $L^{p),\theta}$ სივრცე.

დებულება 1.5.2. თუ $f \in \tilde{L}^{p),\theta}$, მაშინ $\tilde{f} \in \tilde{L}^{p),\theta}$.

დამტკიცება. ამ დებულების დასამტკიცებლად გამოვიყენებთ ს.კ. პიხორიდისის შედეგს ზუსტი მუდმივების შეფასების შესახებ რისის უტოლობაში. ამ შედეგის თანახმად, საკმარისად მცირე ε $-$ისათვის გვაქვს

$$\int_{-\pi}^{\pi}|\tilde{f}(x)|^{p-\varepsilon}dx \le c_{p,\varepsilon}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^{p-\varepsilon}dx$$

სადაც

$$c_{p,\varepsilon} = \begin{cases} tg\dfrac{\pi}{2(p-\varepsilon)} & \text{როცა } 1 < P \leq 2 \\ ctg\dfrac{\pi}{2p} & \text{როცა } 2 < p < \infty \end{cases}$$

მაშინ ცხადია,რომ

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{\theta} \int_{-\pi}^{\pi} \left|\tilde{f}(x)\right|^{p-\varepsilon} dx \leq \lim_{\varepsilon\to 0} c_{p,\varepsilon}\varepsilon^{\theta} \int_{-\pi}^{\pi} |\, f(x)|^{p-\varepsilon}\, dx = 0$$

მაშასადამე, $\tilde{f} \in \tilde{L}^{p),\theta}$.

იმის გამო, რომ ძვრის ოპერაცია არ არის უწყვეტი ზემოხსენებულ სივრცეებში, ჩვენ ფუნქციის სტრუქტურული მახასიათებლის როლში შემდგომში გამოვიყენებთ წილადური რიგის განზოგადებულ სიგლუვის მოდულს, რომლის განსაზღვრა ემყარება სტეკლოვის საშუალოებს. სანამ გადავიდოდეთ შესაბამის განსაზღვრებებზე, ზემონათქვამის საილუსტრაციოდ დავამტკიცოთ ერთი დებულება.

დებულება 1.5.3. ფუნქცია $f(x) = x^{-\frac{1}{p}}$ არ არის საშუალოდ უწყვეტი $L^{p)}$ სივრცეში.

დამტკიცება. ჩვენი მიზანია ვაჩვენოთ, რომ

$$\lim_{h\to 0} \sup_{o<\varepsilon<p-1} (\varepsilon \int_0^1 \left|(x+h)^{-\frac{1}{p}} - x^{-\frac{1}{p}}\right|^{p-\varepsilon} dx)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \neq 0$$

საშუალო მნიშვნელობის თეორემით გვაქვს

$$x^{-\frac{1}{p}} - (x+h)^{-\frac{1}{p}} = \frac{1}{p} h \xi_{x,h}^{-\frac{1}{p}-1}$$

სადაც $x < \xi_{x,h} < x+h$ ამ უკანასკნელის ჯაჭვ-უტოლობიდან გვაქვს

$$(x+h)^{-1-\frac{1}{p}} < \xi_{x,h}^{-1-\frac{1}{p}} < x^{-1-\frac{1}{p}}$$

ამიტომ

$$\mathrm{I} = \sup_{0<\varepsilon<p-1} (\varepsilon \int_0^1 \left|(x+h)^{-\frac{1}{p}} - x^{-\frac{1}{p}}\right|^{p-\varepsilon} dx)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \geq \frac{1}{p} h(\varepsilon \int_h^{2h} (x+h)^{(-1-\frac{1}{p})(p-\varepsilon)}\, dx)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}$$
$$> \frac{1}{p} h(\varepsilon \cdot 3^{(-1-\frac{1}{p})(p-\varepsilon)} \cdot h^{-(1+\frac{1}{p})(p-\varepsilon)} \cdot h)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}$$

ამგვარად,

$$I > \frac{1}{p} \sup_{0<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}} 3^{-(1+\frac{1}{p})} h^{-\frac{1}{p}} h^{\frac{1}{p-\varepsilon}} = 3^{-(1+\frac{1}{p})} \frac{1}{p'} \sup_{0<\varepsilon<p-1} \left(h^{\frac{1}{p-\varepsilon}-\frac{1}{p}} \right) = 3^{-(1+\frac{1}{p})} \frac{1}{p'} \nrightarrow 0$$

ქვემოთ მოგვყავს პერიოდულ ფუნქციათა ტრიგონომეტრიული პოლინომებით აპროქსიმაციის შესახებ ზოგიერთი ცნობილი შედეგი ცვლადმაჩვენებლიან ლებეგის სივრცეებში.ვიგულისხმოთ, რომ 2π –პერიოდული მთელ ღერძზე უწყვეტი ფუნქცია $p \in \mathbb{P}^{log} \cap \mathbb{P}_0$.

$L^{p(.)}(\mathbb{T})$ სივრცის f ფუნქციებისთვის განიხილება ზოგადად წილადური რიგის სიგლუვის მოდული, განსაზღვრული ფორმულით

$$\Omega_r(f,\delta)_{p(.)} = \sup_{0<h_i,t\leq\delta} \left\| \prod_{i=1}^{[r]} (1-m_{h_i}) \sigma_t^{\{r\}} f \right\|_{p(.)},$$

სადაც $r > 0, r = [r] + \{r\}$

$$(m_h f)(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t)dt\,, x \in \mathbb{T}$$

$$\sigma_h^t f(x) := (I - m_h)^t f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{t}{k} \frac{1}{(2h)^k} \int_{-h}^{h} \dots \int_{-h}^{h} f(x+u_1+u_2+\cdots+u_k) du_1 \dots du_k\,,$$

და

$$\binom{t}{k} = \frac{t(t-1)\dots(t-k+1)}{k!} \text{ როცა } k > 1, \binom{t}{1} := t, \binom{t}{0} := 1.$$

$\Omega_r(f,\delta)_{p(.)}$ არის არაუარყოფითი და არაკლებადი ფუნქცია δ –ს მიმართ, ამასთანავე

$$\Omega_r(f_1+f_2,\delta)_{p(.)} \leq \Omega_r(f_1,\delta)_{p(.)} + \Omega_r(f_2,\delta)_{p(.)}$$

და

$$\lim_{\delta\to 0} \Omega_r(f,\delta)_{p(.)} = 0\,.$$

ზემოთ განსაზღვრული განზოგადებული სიგლუვის მოდულის შესახებ იხილეთ [16],[2],[3],[7].

ს. ბერნშტეინის ტერმინოლოგიით ფუნქციათა კონსტრუქციული თეორიის პირდაპირი და შებრუნებული უტოლობები $\Omega_r(f,\delta)_{p(.)}$ სტრუქტურული მახასიათებლის ტერმინებში დადგენილი იყო ვ.კოკილაშვილისა და რ.აკგუნის მიერ [3] ცვლადმაჩვენებლიან ლებეგის სივრცეებში ზოგადი წონებით იმ შემთხვევაში, როცა $p \in \mathbb{P}^{log} \cap \mathbb{P}$. აღნიშნულ უტოლობებში გამოვლენილი იყო სივრცის მეტრიკის გავლენა

შესაბამის შეფასებებზე.ზემოხსენებულ შრომაში მიღებული შედეგები წარმოადგენდა მ.ტიმანის [48]-[50] თეორემების განზოგადებას, დადგენილს სივრცის მუდმივი მაჩვენებლისა და იგივურად ერთიანის ტოლი წონის შემთხვევაში.

მოვიყვანოთ [3] ნაშრომში დამტკიცებული პირდაპირი და შებრუნებული უტოლობები $L^{p(.)}$ სივრცეებში.

დებულება1.5.4. ვთქვათ, $p \in \mathbb{P}^{log} \cap \mathbb{P}, r > 0, \beta = \max(2, p^+)$ და $f \in L^{p(.)}$, მაშინ ადგილი აქვს უტოლობას

$$\frac{1}{n^{2r}}\left\{\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{2\beta r-1} E_\nu^\beta(f)_{p(.)}\right\}^{\frac{1}{\beta}} \leq c\Omega_r\left(f, \frac{1}{n}\right)_{p(.)} \quad (1.5.2)$$

სადაც c მუდმივი არ არის დამოკიდებული n –ზე და f –ზე.

ამ უტოლობიდან გამომდინარეობს უფრო სუსტი უტოლობა, რომელიც ისეთ სახეს ატარებს, როგორც ჯექსონის პირველი უტოლობა:

$$E_n(f)_{p(.)} \leq c\Omega_r\left(f, \frac{1}{n}\right)_{p(.)} \quad (1.5.3)$$

დებულება 1.5.5. ვთქვათ, $p \in \mathbb{P}^{log} \cap \mathbb{P}, r > 0,$ და $\gamma = \min(2, p_-)$, მაშინ

$$\Omega_r\left(f, \frac{1}{n}\right)_{p(.)} \leq \frac{c}{n^{2r}}\left\{\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{2\gamma r-1} E_{\nu-1}^\gamma(f)_{p(.)}\right\}^{\frac{1}{\gamma}}, \quad (1.5.4)$$

სადაც c მუდმივი არ არის დამოკიდებული n –ზე და f –ზე.

მოგვიანებით ი.შარაპუდინოვის [41] მიერ დამტკიცებულ იქნა გარკვეული ტიპის პირდაპირი და შებრუნებული უტოლობები იმ შემთხვევაშიც, როცა $p \in \mathbb{P}^{log} \cap \mathbb{P}_0$. ე.ი. $p_- = 1$. კერძოდ, მიღებული იყო (1.6.3) ტიპის უტოლობა. ამ უკანასკნელი შედეგების მიღება შესაძლებელი გახდა [43] ნაშრომში $p \in \mathbb{P}^{log} \cap \mathbb{P}_o$ შემთხვევაში გარკვეული ტიპის ინტეგრალურ ოპერატორთა ოჯახის ერთობლივ შემოსაზღვრულობის დამტკიცების შედეგად $L^{p(.)}$ სივრცეებში. ჩვენს მიერ გამოყენებული იქნება ხსენებული შედეგის ერთი კერძო შემთხვევა, რომელსაც შემდეგი სახე აქვს

დებულება 1.5.6. ვთქვათ, $p \in \mathbb{P}^{log} \cap \mathbb{P}_o$, მაშინ ოპერატორთა ოჯახი

$$m_h(f) = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(t)dt$$

ერთობლივ შემოსაზღვრულია $L^{p(.)}$ სივრცეში.

ჯექსონის პირდაპირი უტოლობა [41] ნაშრომში დამტკიცებულია შემდეგი სახით

დებულება 1.5.7. ვთქვათ, $p \in \mathbb{P}^{log} \cap \mathbb{P}_o$. მაშინ ყოველი $f \in L^{p(.)}$ ფუნქციისთვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$E_n(f)_{p(.)} \leq c\Omega\left(f, \frac{1}{n}\right)_{p(.)},$$

სადაც c მუდმივი არ არის დამოკიდებული n –ზე და f –ზე.

რაც შეეხება ჯექსონის მეორე უტოლობას, ამ შრომაში დადგენილია p მაჩვენებელთა უფრო ვიწრო კლასებისთვის, სახელდობრ, როცა $p \in \mathbb{P}^{log} \cap \mathbb{P}$.

ამავე [41] ნაშრომში დადგენილია აგრეთვე ბერნშტეინ-ზიგმუნდის უტოლობა ტრიგონომეტრიული პოლინომების მთელი დადებითი რიგის წარმოებულებისათვის.

დებულება 1.5.8. ვთქვათ, $p \in \mathbb{P}^{log} \cap \mathbb{P}_0$. მაშინ ყოველი T_n ტრიგონომეტრიული პოლინომებისათვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$\|T_n'\|_{p(.)} \leq cn\|T_n\|_{p(.)}$$

სადაც c მუდმივი უნივერსალურია.

წინამდებარე შრომაში ჩვენ შემოთავაზებული გვაქვს ბერნშტეინ-ზიგმუნდის უტოლობის განსხვავებული დამტკიცება და მისი გარკვეული დაზუსტება იმ შემთხვევაში, როცა $p \in \mathbb{P}^{log} \cap \mathbb{P}$.

დისერტაციის შედეგების გადმოცემისას დაგვჭირდება 2π-პერიოდული ჯამებადი ფუნქციის ვეილის წილადური α-რიგის ($\alpha > 0$) წარმოებულის ცნება. ვთქვათ, $f \in L^1(\mathbb{T})$ და

$$f(x) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}, \mathbb{Z} = \{\pm 1, \pm 2, \dots\}$$

თუ $\alpha > 0$, მაშინ f ფუნქციის α რიგის წილადური ინტეგრალი განსაზღვრულია, როგორც

$$I_\alpha(x, f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k (ik)^{-\alpha} e^{ikx}, \qquad (ik)^{-\alpha} := |k|^{-\alpha} e^{-\frac{1}{2}\pi i\alpha sign k}$$

წილადური $f^{(\alpha)}$ წარმოებული ($0 < \alpha < 1$) განისაზღვრება, როგორც

$$f^{(\alpha)}(x) := \frac{d}{dx} I_{1-\alpha}(x, f)$$

და

$$f^{(\alpha+l)}(x) := \left(f^{(\alpha)}(x)\right)^{(l)}, l \in \mathbb{Z},$$

თუ მარჯვენა მხარე არსებობს. (ვეილის წარმოებულის შესახებ იხ. მაგალითად [40] გვ. 347).

დისერტაციაში დამტკიცებულია ბერნშტეინის უტოლობის ტიპის უტოლობა წილადური α-რიგის წარმოებულისთვის $L^{p(.)}$ სივრცეში, მაშინაც როცა $p \in \mathbb{P}^{log} \cap \mathbb{P}_0$ ე.ი. $p_- = 1$. ამით, ი შარაპუდინოვის შედეგი გავრცელებულია ტრიგონომეტრიული პოლინომების წილადური წარმოებულებისთვისაც.

როგორც შესავალში იყო აღნიშნული, სადისერტაციო ნაშრომის მეოთხე თავში განიხილება ორი ცვლადის პერიოდული ფუნქციის ტრიგონომეტრიული პოლინომებით „კუთხური" მიახლოება. ამისათვის დაგვჭირდება შერეული განზოგადებული სიგლუვის მოდულის და ტრიგონომეტრიული პოლინომებით „კუთხური" საუკეთესო მიახლოებების ცნებები. შესაბამისი განსაზღვრებები მოტანილი იქნება იმავე თავში.

თავი 2
პერიოდული ფუნქციების ტრიგონომეტრიული პოლინომებით აპროქსიმაციის შესახებ ცვლადმაჩვენებლიან ლებეგის სივრცეებში

შესავალი

მეორე თავში გადმოცემულია შედეგები ტრიგონომეტრიული პოლინომებით აპროქსიმაციის შესახებ ცვლადმაჩვენებლიან ლებეგის სივრცეში.
ჩვენ მიერ მომარჯვებული მეთოდები მოიცავს ფუნქციათა კონსტრუქციულ თეორიაში კარგად ცნობილი მიდგომების განზოგადებას. სახელდობრ, დადგენილია ტრიგონომეტრიული პოლინომების ნორმების სიგლუვის მოდულით ორმხრივი შეფასებები იმ ფუნქციურ სივრცეებში, სადაც მართებულია ი.მარცინკევიჩის ცნობილი თეორემა ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივების მულტიპლიკატორების შესახებ, რაც საშუალებას გვაძლევს მივიღოთ ე.წ. რეალიზაციის თეორემა ცვლადმაჩვენებლიან ლებეგის სივრცეებში. ფუნქციათა აპროქსიმაციის პრობლემების გამოკვლევისას კარგად ცნობილია ტრიგონომეტრიული პოლინომებისათვის ბერნშტეინ-ზიგმუნდისა და ნიკოლსკის უტოლობების მნიშვნელობა. ამ თავში დადგენილია აღნიშნული უტოლობების ანალოგები ცვლადმაჩვენებლიან ლებეგის სივრცეებში. ზემოხსენებულ ფაქტებთან ერთად ამ თავის შედეგების დადგენისას ფართოდ არის გამოყენებული ჰარმონიული ანალიზის ოპერატორების: ჰარდი-ლიტლვუდის მაქსიმალური ფუნქციის, სინგულარული ინტეგრალებისა და რისის პოტენციალის ასახვის თვისებები ლებეგის ცვლადმაჩვენებლიან სივრცეებში.

მეორე თავში, თავდაპირველად, ცვლადმაჩვენებლიან ლებეგის სივრცეებში დამტკიცებულია ფუნქციათა კონსტრუქციული თეორიის შებრუნებული უტოლობები ისეთი ფორმით, როცა უტოლობის სხვადასხვა მხარეს სივრცის მეტრიკის მაჩვენებლები სხვადასხვაა. დადგენილია უტოლობაში სივრცის მეტრიკის გავლენა შესაბამის შეფასებებზე და მიღებულია უფრო ფაქიზი შეფასება, ვიდრე მ.ტიმანის [50] მიერ მიღებული შეფასება ლებეგის სივრცის მუდმივი მაჩვენებლის შემთხვევაში. ზემოხსენებული შედეგის დამტკიცებისას გამოყენებული გვაქვს [3] შრომაში მოცემული დამტკიცების ქარგა, მაგრამ ნიკოლსკის უტოლობის ანალოგიური უტოლობის დამტკიცების წყალობით, ვიღებთ უფრო ზოგად დებულებას. აქვე შევნიშნავთ, რომ კლასიკურ ლებეგის სივრცეებში შებრუნებული ტიპის უტოლობები, როცა უტოლობის სხვადახვა მხარეს სივრცის მაჩვენებლები განსხვავებულია მოცემულია ა. ტიმანის მონოგრაფიაში [51] (იხ. მონოგრაფიის მეექვსე თავი).

ამ თავში განსაკუთრებული ყურადღება აქვს დათმობილი ფუნქციათა აპროქსიმაციის საკითხებს ცვლადმაჩვენებლიან ლებეგის სივრცეებში მაშინ, როცა სივრცის მაჩვენებლის ზუსტი ქვედა საზღვარი ერთის ტოლია. ამ შემთხვევაში დადგენილია შეუღლებული ფუნქციის საუკეთესო მიახლოებების შეფასებები და განზოგადებული

სიგლუვის მოდულის ტერმინებში ნაპოვნია $L^{p(\cdot)}$ სივრცის $(\min p(x) = 1)$ კლასის ის ქვეკლასი, რომელიც ინვარიანტულია შეუღლების ოპერაციის მიმართ. ამავე დროს $L^{p(\cdot)}$ სივრცეში, $p \in \mathbb{P}^{log} \cap \mathbb{P}_0$ დამტკიცებულია ბერნშტეინ-ზიგმუნდის უტოლობა ტრიგონომეტრიული პოლინომის წილადური α რიგის (α>0) წარმოებულისთვის, რაც საშუალებას გვაძლევს დავადგინოთ ფუნქციის წილადური წარმოებულის განზოგადებული სიგლუვის მოდულის შეფასება ტრიგონომეტრიული პოლინომებით საუკეთესო მიახლოებების საშუალებით.

მეორე თავში განხილულია ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივების წრფივი მეთოდებით შეჯამებადობის საშუალოების ცვლადმაჩვენებლიანი ლებეგის სივრცის ნორმით გადახრის შეფასებები საუკეთესო მიახლოებებით.

§2.1 ტრიგონომეტრიული პოლინომების ნორმების განზოგადებული სიგლუვის მოდულით შეფასების შესახებ

ამ პარაგრაფში ბანახის იმ ფუნქციურ სივრცეებში, სადაც ადგილი აქვს ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივებისთვის მარცინკევიჩის მულტიპლიკატორების შესახებ თეორემას დადგენილი იქნება ტრიგონომეტრიული პოლინომების ნორმების ორმხრივი შეფასება განზოგადებული სიგლუვის მოდულით.

განსაზღვრება 2.1.1. ვიტყვით, რომ 2π-პერიოდულ ფუნქციათა L^1 სივრცის ბანახის ფუნქციურ $\mathcal{M}$ ქვესივრცეს გააჩნია მარცინკევიჩის თვისება, თუ მასში მართებულია შემდეგი დებულება:

ვთქვათ, $f \in \mathcal{M}$ და

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

თუ მთელინდექსებიანი რიცხვთა $\{\lambda_k\}$ მიმდევრობა აკმაყოფილებს პირობას

$$|\lambda_k| \leq M, \sum_{\nu=\pm 2^{|k|-1}}^{\pm 2^{|k|}-1} |\lambda_\nu - \lambda_{\nu+1}| \leq M,$$

სადაც M არ არის დამოკიდებული k-ზე , მაშინ ტრიგონომეტრიული მწკრივი

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_k c_k e^{ikx}$$

წარმოადგენს $\mathcal{M}$ სივრცის რაიმე $\varphi(x)$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივს და ადგილი აქვს უტოლობას

$$\|\varphi\|_{\mathcal{M}} \leq cM\|f\|_{\mathcal{M}} ,$$

სადაც დადებითი c მუდმივი არ არის დამოკიდებული f ფუნქციაზე.

შემდგომში სათანადო ადგილას მოვიყვანთ კონკრეტული სივრცეების მაგალითებს მარცინკევიჩის თვისებით. ამჯერად კი მკითხველს მოვაგონებთ, რომ ცვლადმაჩვენებლიანი ლებეგის $L^{p(\cdot)}$ სივრცეები სწორედ ასეთი სივრცეებია, როცა $p \in \mathbb{P}^{log} \cap \mathbb{P}$ (იხ. მაგალითად, [29]).

თეორემა 2.1.1. ვთქვათ, ბანახის ფუნქციურ $\mathcal{M}$ სივრცეს გააჩნია მარცინკევიჩის თვისება, მაშინ ყოველი ტრიგონომეტრიული T_n პოლინომისათვის და $r > 0$-სთვის ადგილი აქვს ორმხრივ შეფასებას

$$c_1 n^{-2r}\left\|T_n^{(2r)}\right\|_{\mathcal{M}} \leq \Omega_r\left(T_n, \frac{1}{n}\right)_{\mathcal{M}} \leq c_2 n^{-2r}\left\|T_n^{(2r)}\right\|_{\mathcal{M}} \qquad (2.1.1)$$

სადაც c_1 და c_2 მუდმივები არ არის დამოკიდებული T_n პოლინომზე.

რადგანაც მოყვანილ დამტკიცებაში ყველგან იგულისხმება $\mathcal{M}$ სივრცის ნორმა, ამიტომ ქვემოთ ნორმას სივრცის სახელი არ ექნება მიწერილი.

დამტკიცება. მარტივი გამოთვლები გვიჩვენებს, რომ

$$A_k(x, T_n) = a_k cosk\left(x + \frac{\pi r}{k} - \frac{\pi r}{k}\right) + b_k sink\left(x + \frac{\pi r}{k} - \frac{\pi r}{k}\right) = cos\pi r\left[a_k cosk\left(x + \frac{\pi r}{k}\right) + b_k sink\left(x + \frac{\pi r}{k}\right)\right] + sin\pi r\left[a_k sink\left(x + \frac{\pi r}{2}\right) - b_k sink\left(x + \frac{\pi r}{2}\right)\right] = A_k\left(x + \frac{\pi r}{k}, T_n\right) cos\pi r + A_k\left(x + \frac{\pi r}{2}, \widetilde{T_n}\right) sin\pi,$$

სადაც

$$A_k(x, f) = a_k(f)coskx + b_k(f)sinkx$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$(1 - \frac{sinx}{x})_* = \begin{cases} 1 - \dfrac{sinx}{x}, & x \in \mathbb{R}^+ \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

მაშინ გვექნება:

$$(1 - \frac{sinx}{x})_* \leq x^2, \qquad \text{როცა} \quad x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

როცა $0 < t, h \leq \frac{1}{n}$, მაშინ გვაქვს

$$\left\|(I-\sigma_i)^{\{r\}}\prod_{k=1}^{[r]}(I-\sigma_{h_i})T_n\right\|$$
$$=\left\|A_0(x,T_n)+\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{sinkh_1}{kh_1}\right)\dots\left(1-\frac{sinkh_{[r]}}{kh_{[r]}}\right)\left(1-\frac{sinkt}{kt}\right)^{\{r\}}A_k(x,T_n)\right\|$$
$$=\left\|\sum_{k=0}^{n}\left(1-\frac{sinkh_1}{kh_1}\right)_*\dots\left(1-\frac{sinkh_{[r]}}{kh_{[r]}}\right)_*\left(1-\frac{sinkt}{kt}\right)_*^{\{r\}}A_k(x,T_n)\right\|$$
$$=\left\|\sum_{k=0}^{n}\frac{\left(1-\frac{sinkh_1}{kh_1}\right)_*}{(kh_1)^2}(kh_1)^2\dots\frac{\left(1-\frac{sinkh_{[r]}}{kh_{[r]}}\right)_*}{(kh_{[r]})^2}(kh_{[r]})^2\frac{\left(1-\frac{sinkt}{kt}\right)_*^{\{r\}}}{(kt)^{2\{r\}}}(kt)^{2\{r\}}A_k(x,T_n)\right\|$$
$$\leq n^{-2r}\left\|\sum_{k=0}^{n}\frac{\left(1-\frac{sinkh_1}{kh_1}\right)_*}{(kh_1)^2}k^2\dots\frac{\left(1-\frac{sinkh_{[r]}}{kh_{[r]}}\right)_*}{(kh_{[r]})^2}k^2\frac{\left(1-\frac{sinkt}{kt}\right)_*^{\{r\}}}{(kt)^{2\{r\}}}k^{2\{r\}}A_k(x,T_n)\right\|$$
$$\leq n^{-2r}\left\|\sum_{k=0}^{n}k^{2r}\frac{\left(1-\frac{sinkh_1}{kh_1}\right)_*}{(kh_1)^2}\dots\frac{\left(1-\frac{sinkh_{[r]}}{kh_{[r]}}\right)_*}{(kh_{[r]})^2}\left(\frac{\left(1-\frac{sinkt}{kt}\right)_*}{(kt)^2}\right)^{\{r\}}A_k(x,T_n)\right\|$$

გამოვიყენოთ ის ფაქტი, რომ სივრცე M მარცინკევიჩის თვისების მატარებელია.

მაშინ უკანასკნელი შეფასებიდან მივიღებთ:

$$\left\|(I-\sigma_i)^{\{r\}}\prod_{k=1}^{[r]}(I-\sigma_{h_i})T_n\right\|\leq cn^{-2r}\left\|\sum_{k=0}^{n}k^{2r}A_k(x,T_n)\right\| \tag{2.1.2}$$

(2.1.2)-დან გვაქვს

$$\left\|(I-\sigma_i)^{\{r\}}\prod_{k=1}^{[r]}(I-\sigma_{h_i})T_n\right\|$$
$$\leq cn^{-2r}\left\|\sum_{k=0}^{n}k^{2r}\left[A_k\left(x+\frac{\pi r}{k},T_n\right)cos\pi r+A_k\left(x+\frac{\pi r}{k},\widetilde{T_n}\right)sin\pi r\right]\right\|$$
$$\leq cn^{-2r}\left(\left\|\sum_{k=0}^{n}k^{2r}A_k\left(x+\frac{\pi r}{k},T_n\right)\right\|+\left\|\sum_{k=0}^{n}k^{2r}A_k\left(x+\frac{\pi r}{k},\widetilde{T_n}\right)\right\|\right)$$

რადგანაც

$$A_k\left(x, T_n{}^{(2r)}\right) = k^{2r} A_k \left(x + \frac{\pi r}{k}, T_n\right), k = 1,2 \ldots$$

ამიტომ უკანასკნელი უტოლობიდან მივიღებთ

$$\Omega_r(T_n, \frac{1}{n}) = \sup_{0<t,h_i\leq 1} \left\| (I - \sigma_i)^{\{r\}} \prod_{k=1}^{[r]} (I - \sigma_{h_i}) T_n \right\|$$
$$\leq cn^{-2r} \left(\left\| \sum_{k=0}^{n} k^{2r} A_k \left(x + \frac{\pi r}{k}, T_n\right) \right\| + \left\| \sum_{k=0}^{n} k^{2r} A_k \left(x + \frac{\pi r}{k}, \widetilde{T_n}\right) \right\| \right)$$
$$= cn^{-2r} \left(\left\| T_n{}^{(2r)} \right\| + \left\| \widetilde{T_n}{}^{(2r)} \right\| \right) \leq cn^{-2r} \left\| T_n{}^{(2r)} \right\|$$

აქ გამოვიყენეთ შეუღლების ოპერაციის შემოსაზღვრულობა, რაც არის მულტიპლიკატორების შესახებ თეორემის შედეგი, საკმარისია აღნიშნულ დებულებაში ავიღოთ $\lambda_k = -i\ signk$. ამ უკანასკნელზე გამრავლება იძლევა მოცემული ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივის შეუღლებულ მწკრივს.

ახლა $\Omega_r\left(T_n, \frac{1}{n}\right)$ შევაფასოთ ქვემოდან. ცხადია, რომ

$$\left\| T_n{}^{(2r)} \right\| = \left\| \sum_{k=1}^{n} k^{2r} A_k \left(x + \frac{\pi r}{k}, T_n\right) \right\| = \left\| \sum_{k=1}^{n} k^{2r} \left(cos\pi r A_k(x, T_n) - sin\pi r A_k\left(x, \widetilde{T_n}\right)\right) \right\|$$
$$\leq \left\| \sum_{k=1}^{n} k^{2r} cos\pi r A_k(x, T_n) \right\| + \left\| \sum_{k=1}^{n} k^{2r} sin\pi r A_k\left(x, \widetilde{T_n}\right) \right\|$$

ეს უკანასკნელი შეგვიძლია შემდეგნაირად გადავწეროთ

$$\left\| T_n{}^{(2r)} \right\| \leq n^{2r} \left\| \sum_{k=1}^{n} cos\pi r \left(\frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2}{\left(1 - \frac{sin\frac{k}{n}}{\frac{k}{n}}\right)} \right)^r \left(1 - \frac{sin\frac{k}{n}}{\frac{k}{n}}\right)^r A_k(x, T_n) \right\|$$
$$+ n^{2r} \left\| \sum_{k=1}^{n} sin\pi r \left(\frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2}{\left(1 - \frac{sin\frac{k}{n}}{\frac{k}{n}}\right)} \right)^r \left(1 - \frac{sin\frac{k}{n}}{\frac{k}{n}}\right)^r A_k\left(x, \widetilde{T_n}\right) \right\|$$

აქედან, რადგანაც სივრცე $\mathcal{M}$ მარცინკევიჩის თვისების მატარებელია, მივიღებთ:

$$\|T_n{}^{(2r)}\| \le cn^{2r}\left\|\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{\sin\frac{k}{n}}{\frac{k}{n}}\right)^r A_k(x,T_n)\right\| + \left\|\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{\sin\frac{k}{n}}{\frac{k}{n}}\right)^r A_k(x,\widetilde{T_n})\right\|$$

თუ ვისარგებლებთ შეუღლებული ოპერაციის წრფივობით და შემოსაზღვრულობით ამ უკანასკნელიდან ვღებულობთ

$$\|T_n{}^{(2r)}\| \le cn^{2r}\left\|\sum_{k=0}^{n}\left(1-\frac{\sin\frac{k}{n}}{\frac{k}{n}}\right)^r A_k(x,T_n)\right\| \le \left\|\left(I-\sigma_{\frac{1}{n}}\right)^{\{r\}} T_n\right\|$$

$$\le cn^{2r}\sup_{0<n_i,u\le\frac{1}{n}}\left\|\prod_{k=1}^{[r]}(I-\sigma_{h_i})(I-\sigma_u)^{\{r\}}T_n\right\| \le cn^{2r}\,\Omega_r\left(T_n,\frac{1}{n}\right)$$

ამგვარად,

$$\frac{1}{n^{2r}}\|T_n{}^{(2r)}\|_M \le c\Omega_r\left(T_n,\frac{1}{n}\right)_M$$

სადაც c არ არის დამოკიდებული n –ზე და T_n –ზე.

§2.2 რეალიზაციის თეორემა ცვლადმაჩვენებლიან ლებეგის სივრცეებში, როცა $p \in \mathbb{P} \cap \mathbb{P}^{log}$

თეორემა 2.2.1. ვთქვათ, $p \in \mathbb{P} \cap \mathbb{P}^{log}$ და $r > 0$. ვთქვათ, 2π პერიოდული $f \in L^{p(.)}$ მაშინ ადგილი აქვს ორმხრივ შეფასებას

$$c_1\left(\|f-S_n(f)\|_{p(.)}+n^{-2r}\left\|S_n^{(2r)}(f)\right\|_{p(.)}\right) \le \Omega_r\left(f,\tfrac{1}{n}\right)_{p(.)} \le c_2\left(\left\|f-S_n(f)_{p(.)}\right\|_{p(.)}+ n^{-2r}\left\|S_n^{(2r)}(f)\right\|_{p(.)}\right) \qquad (2.2.1)$$

სადაც $S_n(f)$ აღნიშნავს f ფუნქციის ფურიეს მწკრივის კერძო ჯამებს და c_1 და c_2 არ არის დამოკიდებული f -ზე და n –ზე.

დამტკიცება. პირველ თავში აღნიშნული გვქონდა, რომ

$$\|f-S_n(f)\|_{p(.)} \le cE_n(f)_{p(.)}$$

ამიტომ ჯექსონის პირველი თეორემის ძალით $L^{p(.)}$ სივრცეებისათვის (იხ. თავი 1) გვექნება

$$\|f-S_n(f)\|_{p(.)} \le c\Omega_r\left(f,\frac{1}{n}\right)_{p(.)} \qquad (2.2.2)$$

მეორეს მხრივ, წინა პარაგრაფში დამტკიცებული თეორემის თანახმად

$$n^{-2r}\left\|S_n^{(2r)}(f)\right\|_{p(.)} \le c\Omega_r\left(S_n,\frac{1}{n}\right)_{p(.)} \le c\left(\Omega_r\left(f-S_n,\frac{1}{n}\right)_{p(.)}+\Omega_r\left(f,\frac{1}{n}\right)_{p(.)}\right)$$
$$\le c\left(\|f-S_n(f)\|_{p(.)}+\Omega_r\left(f,\frac{1}{n}\right)_{p(.)}\right) \le c\Omega_r\left(f,\frac{1}{n}\right)_{p(.)}$$

ამიტომ (2.2.2)-ის ძალით მივიღებთ

$$c_1\left(\|f-S_n(f)\|_{p(.)}+n^{-2r}\left\|S_n^{(2r)}(f)\right\|_{p(.)}\right) \le \Omega_r\left(f,\frac{1}{n}\right)_{p(.)} \qquad (2.2.3)$$

მეორეს მხრივ,

$$\Omega_r\left(f,\frac{1}{n}\right)_{p(.)} \le \Omega_r\left(f-S_n,\frac{1}{n}\right)_{p(.)}+\Omega_r\left(S_n,\frac{1}{n}\right)_{p(.)}$$

თუ გამოვიყენებთ წინა პარაგრაფში დამტკიცებულ დებულებას, მაშინ გვექნება

$$\Omega_r\left(f,\frac{1}{n}\right)_{p(.)} \le c_2\left(\|f-S_n\|_{p(.)}+n^{-2r}\left\|S_n^{(2r)}(f)\right\|_{p(.)}\right) \qquad (2.2.4)$$

(2.2.3) და (2.2.4) გვაძლევს სასურველ შედეგს.

§2.3 ბერნშტეინ-ზიგმუნდის უტოლობის ტიპის უტოლობა და მისი დაზუსტება

ამ პარაგრაფში ტრიგონომეტრიული პოლინომების წილადური წარმოებულებისათვის მოყვანილი იქნება ბერნშტეინ-ზიგმუნდის უტოლობის ტიპის უტოლობა $\mathcal{M}$ სივრცეებში და მისი გარკვეული ტიპის დაზუსტება.

თეორემა 2.3.1. ვთქვათ, ბანახის ფუნქციურ $\mathcal{M}$ სივრცეს აქვს მარცინკევიჩის თვისება. მაშინ ნებისმიერი T_n ტრიგონომეტრიული პოლინომისთვის და ნებისმიერი $r>0$-სთვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$\left\|T_n^{(r)}\right\|_{\mathcal{M}} \le cn^r\|T_n\|_{\mathcal{M}} \qquad (2.3.1)$$

სადაც c მუდმივი არ არის დამოკიდებული T_n–ზე.

დამტკიცება. ვთქვათ,

$$T_n(x)=\sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu cos\nu x+b_\nu sin\nu x)$$

განვიხილოთ რიცხვთა მიმდევრობა

$$\lambda_{\nu,n} = \begin{cases} \dfrac{\nu^r}{n^r}, & \text{როცა } 1 \le \nu \le n \\ 0, & \text{როცა } \nu > n \end{cases}$$

ეს მიმდევრობა აკმაყოფილებს მარცინკევიჩის მამრავლების პირობას. ამიტომ გვექნება

$$\left\| \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_{\nu,n}(a_\nu cos\nu x + b_\nu sin\nu x) \right\|_{\mathcal{M}} \le c\|T_n\|_{\mathcal{M}}$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ

$$\left\| \sum_{\nu=1}^{n} \nu^r(a_\nu cos\nu x + b_\nu sin\nu x) \right\|_{\mathcal{M}} \le cn^r\|T_n\|_{\mathcal{M}} \qquad (2.3.2)$$

სადაც დადებითი მუდმივი c არ არის დამოკიდებული T_n პოლინომზე.

მეორეს მხრივ,

$$T_n^{(r)}(x) = t_n^{(r)}(x)cos\frac{\pi r}{2} - \tilde{t}_n^{r}(x)sin\frac{\pi r}{2}$$

სადაც

$$t_n^{(r)}(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \nu^r(a_\nu cos\nu x + b_\nu sin\nu x)$$

თუ გამოვიყენებთ (2.3.2) და იმ ფაქტს, რომ $\mathcal{M}$ სივრცეში შეუღლების ოპერაცია შემოსაზღვრულია, დავასკვნით (2.3.1)-ის მართებულობას.

ქვემოთ მოგვყავს ბერნშტეინ-ზიგმუნდის უტოლობის ტიპის უტოლობის გარკვეული დაზუსტება.

თეორემა 2.3.2. არსებობს ისეთი დადებითი მუდმივი c, რომ ნებისმიერი T_n ტრიგონომეტრიული პოლინომისთვის და დადებითი r რიცხვისათვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$\left\|T_n^{(r)}\right\|_{\mathcal{M}} \le cn^r\Omega_{\frac{r}{2}}\left(T_n, \frac{1}{n}\right)_{\mathcal{M}} \qquad (2.3.3)$$

ასეთი ტიპის უტოლობას ზოგჯერ სტეჩკინ-ნიკოლსკის ტიპის უტოლობასაც უწოდებენ. მათ ასეთი ტიპის შედეგი დადგენილი ჰქონდათ უწყვეტ ფუნქციათა და L^1 სივრცეებში.

დამტკიცება. ვთქვათ, $A_k = a_k coskx + b_k sinkx$, მაშინ განსაზღვრის თანახმად:

$$\left\|T_n^{(r)}\right\|_{\mathcal{M}} = \left\|\sum_{k=1}^{n} k^r A_k\left(x+\frac{\pi r}{2k}, T_n\right)\right\|_{\mathcal{M}} \le \left\|\sum_{k=1}^{n} k^r \left(\cos\frac{\pi r}{2}\right) A_k(x,T_n) - \sin\frac{\pi r}{2} A_k\left(x,\tilde{T}_n\right)\right\|_{\mathcal{M}}$$

$$\le \left\|\sum_{k=1}^{n} k^r \cos\frac{\pi r}{2} A_k(x,T_n)\right\|_{\mathcal{M}} + \left\|\sum_{k=1}^{n} \sin\frac{\pi r}{2} A_k\left(x,\tilde{T}_n\right)\right\|_{\mathcal{M}} \qquad (2.3.4)$$

აქ $\tilde{T}_n$ აღნიშნავს T_n ის შეუღლებულს. გადავწეროთ (2.3.4) უტოლობა შემდეგნაირად:

$$\left\|T_n^{(r)}\right\|_{\mathcal{M}} \le n^r \left\|\sum_{k=1}^{n} \left(\cos\frac{\pi r}{2}\right) \left(\frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2}{\left(1-\frac{\sin\frac{k}{n}}{\frac{k}{n}}\right)}\right)^{\frac{r}{2}} \left(1-\frac{\sin\frac{k}{n}}{\frac{k}{n}}\right)^{\frac{r}{2}} A_k(x,T_n)\right\|_{\mathcal{M}}$$

$$+ n^r \left\|\sum_{k=1}^{n} \left(\sin\frac{\pi r}{2}\right) \left(\frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2}{\left(1-\frac{\sin\frac{k}{n}}{\frac{k}{n}}\right)}\right)^{\frac{r}{2}} \left(1-\frac{\sin\frac{k}{n}}{\frac{k}{n}}\right)^{\frac{r}{2}} A_k\left(x,\tilde{T}_n\right)\right\|_{\mathcal{M}}$$

გამოვიყენოთ მარცინკევიჩის მულტიპლიკატორების ტიპის თვისება. მაშინ გვექნება

$$\left\|T_n^{(r)}\right\|_{\mathcal{M}} \le cn^r \left(\left\|\sum_{k=1}^{n} \left(1-\frac{\sin\frac{k}{n}}{\frac{k}{n}}\right)^{\frac{r}{2}} A_k(x,T_n)\right\|_{\mathcal{M}} + \left\|\sum_{k=1}^{n} \left(1-\frac{\sin\frac{k}{n}}{\frac{k}{n}}\right)^{\frac{r}{2}} A_k\left(x,\tilde{T}_n\right)\right\|_{\mathcal{M}}\right)$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ შეუღლებული ოპერატორის შემოსაზღვრულობას $\mathcal{M}$ სივრცეში, რაც მულტიპლიკატორების შესახებ თეორემის შედეგია, მაშინ მივიღებთ

$$\left\|T_n^{(r)}\right\|_{\mathcal{M}} \le cn^r \left\|\sum_{k=1}^{n} \left(1-\frac{\sin\frac{k}{n}}{\frac{k}{n}}\right)^{\frac{r}{2}} A_k(x,T_n)\right\|_{\mathcal{M}} \le cn^r \left\|\left(I-m_{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{r}{2}} T_n\right\|_{\mathcal{M}}$$

$$= cn^r \left\|\left(I-m_{\frac{1}{n}}\right)^{\left[\frac{r}{2}\right]+\left\{\frac{r}{2}\right\}} T_n\right\|_{\mathcal{M}} \le cn^r \sup_{\substack{0<h_i,\ u\le\frac{1}{n} \\ i=1,2,\ldots,\left[\frac{r}{2}\right]}} \left\|\prod_{i=1}^{\left[\frac{r}{2}\right]} \left(I-m_{h_i}\right)(1-\sigma_u)^{\left\{\frac{r}{2}\right\}} T_n\right\|_{\mathcal{M}}$$

$$\le cn^r \Omega_{\frac{r}{2}}\left(T_n, \frac{1}{n}\right)_{\mathcal{M}}$$

თეორემა დამტკიცებულია.

ცხადია, დამტკიცებული უტოლობიდან გამომდინარეობს (2.1.1) ჯაჭვ-უტოლობის მარცხენა უტოლობა.

§2.4 ნიკოლსკის უტოლობის ტიპის უტოლობები ცვლადმაჩვენებლიან ლებეგის სივრცეებში

ამ პარაგრაფში ჩვენ დავამტკიცებთ ნიკოლსკის ტიპის ცნობილი უტოლობების ანალოგებს ცვლადმაჩვენებლიან ლებეგის სივრცეებში.

ს.ნიკოლსკის მიერ კლასიკურ ლებეგის სივრცეებში დამტკიცებული იყო აპროქსიმაციის თეორიისათვის ფრიად მნიშვნელოვანი უტოლობა, რომელიც იძლევა ტრიგონომეტრიული პოლინომის L^q სივრცის ნორმის შეფასებას $L^p(p<q)$ სივრცეების ნორმით. შესაბამისი თეორემა ასე ყალიბდება:

დებულება A. ვთქვათ $1 \leq p \leq q < \infty$. მაშინ ყოველი ტრიგონომეტრიული $T_n(x)$ პოლინომისთვის, რომლის რიგი არ აღემატება n –ს, ადგილი აქვს უტოლობას

$$\|T_n\|_q \leq cn^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|T_n\|_p$$

სადაც c დადებითი მუდმივი არ არის დამოკიდებული T_n პოლინომზე.

ქვემოთ ჩვენ დავამტკიცებთ შემდეგ დებულებას.

თეორემა 2.4.1. ვთქვათ, p და $q - 2\pi$ პერიოდული ფუნქციებია ისეთი, რომ $p \in \mathbb{P} \cap \mathbb{P}^{log}$ და

$$\frac{1}{p(x)} - \frac{1}{q(x)} = s, x \in T,$$

სადაც s რაიმე დადებითი რიცხვია, რომლისთვისაც $p_+ < \frac{1}{s}$ მაშინ, ყოველი T_n ტრიგონომეტრიული პოლინომისთვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$\|T_n(x)\|_{q(.)} \leq cn^s\|T_n\|_{p(.)} \qquad (2.4.1)$$

სადაც დადებითი c მუდმივი არ არის დამოკიდებული T_n პოლინომზე.

ამ თეორემის დამტკიცება ეყრდნობა შემდეგ ცნობილ დებულებებს.

დებულება B. $L^1(\mathbb{T})$ კლასის f ფუნქცია წარმოიდგინება როგორც წილადური ინტეგრალი

$$f(x) = a_0(f) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(x-t)\psi_\mp^\alpha(t)\,dt, \qquad \varphi \in L^1(T),$$

სადაც

$$\psi_\mp^\alpha(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikt}}{(\pm ik)^\alpha} - 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kt \pm \frac{\alpha\pi}{2})}{k^\alpha}, \alpha > 0.$$

მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა თუ არსებობს ისეთი $g \in L^1(T)$ ფუნქცია,რომ

$$(ik)^\alpha c_k(f) = c_k(g), k \in \mathbb{Z}, \qquad (2.4.2)$$

ამასთანავე $g(x) \equiv \varphi(x)$.

ზემოთ $c_k(f)$ (შესაბამისად $c_k(g)$) აღნიშნავს შესაბამისი ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტებს.

დებულება C. არსებობს ისეთი დადებითი c მუდმივი, რომ $\psi_\mp^\alpha(t)$ ფუნქიისათვის ადგილი აქვს შეფასებას

$$|\psi_\mp^\alpha(t)| \leq c|t|^{\alpha-1}, \qquad (2.4.3)$$

ყველა $|t| \leq \pi$.

ზემოთ მოყვანილი ორი დებულება მკითხველს შეუძლია მოიძიოს [40] მონოგრაფიაში, გვ.270,265.

შემდეგი დებულება ეხება წილადური ინტეგრალის შემოსაზღვრულობის საკითხს.

დებულება D. ვთქვათ, $0 < \alpha < 1$ თუ სასრულ J ინტერვალზე მოცემული $p \in \mathbb{P} \cap \mathbb{P}^{log}$ ფუნქციისათვის $g(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია პირობით

$$\frac{1}{p(x)} - \frac{1}{q(x)} = \alpha,$$

მაშინ წილადური ინტეგრალური ოპერატორი

$$I_\alpha(f)(x) = \int_J \frac{f(y)}{|x-y|^{1-\alpha}}dy$$

არის შემოსაზღვრული $L^{p(.)}(J)$ სივრციდან $L^{q(.)}(J)$ სივრცეში.

(იხ, მაგალითად, [8], თეორემა 5.46)

თეორემა 2.4.1-ის დამტკიცება. დებულება A-ს თანახმად,

$$T_n(x) = a_0(T_n) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T_n{}^{(s)}(x-t)\psi_+^s(t)\,dt, \qquad (2.4.4)$$

სადაც $T_n{}^{(s)}$ არის T_n პოლინომის წილადური s −რიგის წარმოებული. თუ გამოვიყენებთ (2.4.3) შეფასებას, მაშინ მივიღებთ,რომ

$$|T_n(x) - a_0(T_n)| \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\left|T_n{}^{(s)}(x-t)\right|}{|t|^s}dt \le c\int_{-2\pi}^{2\pi} \frac{\left|T_n{}^{(s)}(t)\right|}{|x-t|^{1-s}}dt, \qquad x \in (-\pi,\pi)$$

დებულება D-ს ძალით,

$$\|T_n - a_0(T_n)\|_{q(.)} \le c\left\|T_n{}^{(s)}\right\|_{p(.)} \qquad (2.4.5)$$

უკანასკნელი შეფასებისას გამოვიყენეთ $p(x)$ პერიოდულობა.მიღებული უტოლობის ორივე მხარეში ნორმა აღებულია $(-\pi,\pi)$ ინტერვალზე.

(2.4.5) უტოლობის მარჯვენა მხარეში გამოვიყენოთ თეორემა 2.3.1, მაშინ მივიღებთ, რომ

$$\|T_n - a_0(T_n)\|_{q(.)} \le cn^s\|T_n\|_{p(.)} \qquad (2.4.6)$$

ახლა შევნიშნოთ, რომ ცვლადმაჩვენებლიანი სივრცეებისთვის ჰელდერის უტოლობის გამოყენებით მივიღებთ.

$$|a_0(T_n)| \le c\int_{-\pi}^{\pi}|T_n(t)|\,dt \le c\|T_n\|_{p(.)} \qquad (2.4.7)$$

და, ბოლოს (2.4.6) და (2.4.7) უტოლობების ძალით დავასკვნით (2.4.1) უტოლობის მართებულობას.

§2.5 შებრუნებული ტიპის უტოლობები ცვლადმაჩვენებლიან ლებეგის სივრცეებში,როცა უტოლობების სხვადასხვა მხარეს სივრცის მაჩვენებლები განსხვავებულია

ამ პარაგრაფში მიღებულია $L^{q(.)}$ სივრცის აზრით განზოგადებული სიგლუვის მოდულის შეფასება$L^{p(.)}(p(.) \le q(.))$ სივრცეში ტრიგონომეტრიული პოლინომებით საუკეთესო მიახლოების საშუალებით. უნდა აღინიშნოს, რომ მიღებული შეფასება რიგის მიხედვით უკეთესია, ვიდრე ეს მიღებული ჰქონდა მ.ტიმანს იმ შემთხვევაში, როცა სივრცის მაჩვენებლები $p(x)$ და $q(x)$ იყო მუდმივები. სათანადო თეორემების დამტკიცება ეყრდნობა ცვლადმაჩვენებლიან ლებეგის სივრცეებში ლიტლვუდ-პელის დეკომპოზიციის თეორემას, მარცინკევიჩის მულტიპლიკატორების თეორემას, ამავე

სივრცეში ბერნშტეინისა და ნიკოლსკის ტიპის უტოლობებს ტრიგონომეტრიული პოლინომებისათვის და ე.წ. რეალიზაციის უტოლობას.

ჩვენ დაგვჭირდება ორი ლემა, რომელთა დამტკიცების დროს გამოვიყენებთ ცვლადმაჩვენებლიანი ლებეგის სივრცეების ნორმის შემდეგ თვისებას (იხ. [8], გვ.22)

$$\||f|^s\|_{p(.)} = \|f\|^s_{s\cdot p(.)}$$

ყოველი s-სათვის, $\frac{1}{p_-} \le s < +\infty$.

ლემა 2.5.1. ვთქვათ $1 < p_- \le 2$ მაშინ ზომად ფუნქციათა ნებისმიერი $\{\varphi_j(x)\}_{j=1}^m$ სისტემისათვის, $\varphi_j \in L^{p(.)}(\mathbb{T})$ადგილი აქვს უტოლობას

$$\left\|\left(\sum_{j=1}^m \varphi_j^2\right)^{1/2}\right\|_{p(.)} \le \left(\sum_{j=1}^m \|\varphi_j\|_{p(.)}^{p_-}\right)^{\frac{1}{p_-}}$$

დამტკიცება. მართლაც,

$$\left\|\left(\sum_{j=1}^m \varphi_j^2\right)^{1/2}\right\|_{p(.)} = \left\|\left(\sum_{j=1}^m \varphi_j^2\right)^{\frac{p_-}{2}\frac{1}{p_-}}\right\|_{p(.)} \le \left\|\left(\sum_{j=1}^m |\varphi_j|^{p_-}\right)^{\frac{1}{p_-}}\right\|_{p(.)} = \left\|\sum_{j=1}^m |\varphi_j|^{p_-}\right\|_{\frac{p(.)}{p_-}}^{\frac{1}{p_-}}$$

$$\le \left(\sum_{j=1}^m \|\varphi_j^{p_-}\|_{\frac{p(.)}{p_-}}\right)^{\frac{1}{p_-}} = \left(\sum_{j=1}^m \|\varphi_j\|_{p(.)}^{p_-}\right)^{\frac{1}{p_-}}$$

ლემა 2.5.2. ვთქვათ, $p_- \ge 2$ მაშინ ზომად ფუნქციათა ნებისმიერი $\{\varphi_j\}_{j=1}^m$ სისტემისათვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$\left\|\left(\sum_{j=1}^m \varphi_j^2\right)^{1/2}\right\|_{p(.)} \le \left(\sum_{j=1}^m \|\varphi_j\|_{p(.)}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

დამტკიცება. ჩვენ გვაქვს

$$\left\|\left(\sum_{j=1}^m \varphi_j^2\right)^{1/2}\right\|_{p(.)} = \left\|\sum_{j=1}^m \varphi_j^2\right\|_{\frac{p(.)}{2}}^{\frac{1}{2}} \le \left(\sum_{j=1}^m \|\varphi_j^2\|_{\frac{p(.)}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{j=1}^m \|\varphi_j\|_{p(.)}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

სანამ გადავიდოდეთ სიგლუვის მოდულის შეფასებაზე, დავამტკიცოთ უტოლობა, რომელიც $L^{p(.)}$ სივრცეში f ფუნქციის საუკეთესო მახლოების ტერმინებში იძლევა იმის პირობას, რომ f მიეკუთვნებოდეს $L^{q(.)}$ სივრცეს და აფასებს ამ ფუნქციის $L^{q(.)}$ სივრცეში საუკეთესო მოახლოებას $L^{p(.)}$ სივრცეში საუკეთესო მიახლოებით.

თეორემა 2.5.1. ვთქვათ, 2π პერიოდული მთელ ღერძზე უწყვეტი $p(x)$და $q(x)$ ფუნქციები მიეკუთვნებიან $\mathbb{P}^{log} \cap \mathbb{P}$ კლასს. დავუშვათ, რომ

$$\frac{1}{q(x)} = \frac{1}{p(x)} - s, \quad x \in \mathbb{T}.$$

სადაც s არის დადებითი მუდმივი. თუ $p_+ < \frac{1}{s}$ და შესრულებულია პირობა

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{\gamma s-1} E_\nu^\gamma(f)_{p(.)} < +\infty, \qquad \gamma = \min(2, q_-) \tag{2.5.1}$$

მაშინ $f \in L^{q(.)}(\mathbb{T})$ და ადგილი აქვს შემდეგ უტოლობას

$$E_n(f)_{q(.)} \leq c\left(n^s E_n(f)_{p(.)} + \left(\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{\gamma s-1} E_\nu^\gamma(f)_{p(.)}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right)$$

სადაც c არ არის დამოკიდებული f –ზე და n –ზე.

დამტკიცება. ქვემოთ მიღებული შეფასებების გამოყენება გვიჩვენებს, რომ თეორემის პირობებში $f \in L^{q(.)}$. მივიღოთ, რომ $S_n(f) \coloneqq S_n(\cdot, f)$ და $2^m < n \leq 2^{m+1}$, მაშინ გვექნება

$$\|f - S_n(f)\|_{q(.)} \leq \|S_{2^{m+2}}(f) - S_n(f)\|_{q(.)} + \left\|\sum_{k=m+2}^{\infty} (S_{2^{k+1}}(f) - S_{2^k}(f))\right\|_{q(.)}$$

პირველ შესაკრებში გამოვიყენოთ ნიკოლსკის ტიპის უტოლობა, მაშინ

$$\|f - S_n(f)\|_{q(.)} \leq c(2^{(m+2)s}\|S_{2^{m+2}}(f) - S_n\|_{p(.)} + \left\|\sum_{k=m+2}^{\infty} \sum_{j=2^k+1}^{2^{k+1}} A_j(x)\right\|_{q(.)})$$

ლიტლვუდ-პელის თეორემის ძალით ცვლადმაჩვენებლიანი ლებეგის სივრცეებისთვის [29] მივიღებთ:

$$E_n(f)_{q(.)} \leq c(n^s E_n(f)_{p(.)} + \left\|\left(\sum_{k=m+2}^{\infty} \left|\sum_{j=2^k+1}^{2^{k+1}} A_j(x)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{q(.)})$$

2.5.1 და 2.5.2 ლემების გამოყენებით ვღებულობთ, რომ

$$E_n(f)_{q(.)} \leq c(n^s E_n(f)_{p(.)} + (\sum_{k=m+2}^{\infty} \left\|\sum_{j=2^k+1}^{2^{k+1}} A_j(x)\right\|_{q(.)}^{\gamma})^{1/\gamma})$$

მეორე შესაკრებში გამოვიყენოთ ნიკოლსკის ტიპის უტოლობა. მაშინ გვექნება:

$$E_n(f)_{q(.)} \leq c(n^s E_n(f)_{p(.)} + (\sum_{k=m+2}^{\infty} 2^{(k+1)\gamma s} \left\| \sum_{j=2^k+1}^{2^{k+1}} A_j(x) \right\|_{p(.)}^{\gamma})^{\frac{1}{\gamma}})$$

აქედან ვღებულობთ, რომ

$$E_n(f)_{q(.)} \leq c(n^s E_n(f)_{p(.)} + \left(\sum_{k=m+2}^{\infty} 2^{(k+1)\gamma s} E_{2^k+1}^{\gamma}(f)_{p(.)} \right)^{\frac{1}{\gamma}})$$

ამ უკანასკნელი შეფასებიდან კი ვასკვნით, რომ

$$E_n(f)_{q(.)} \leq c(n^s E_n(f)_{p(.)} + \left(\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{\gamma s-1} E_{\nu}^{\gamma}(f)_{p(.)} \right)^{\frac{1}{\gamma}})$$

შევნიშნოთ, რომ მუდმივი p მაჩვენებლისთვის ეს უკანასკნელი უტოლობა უფრო ზუსტ შეფასებას იძლევა, ვიდრე ა. კონიუშკოვის მიერ [32] ნაშრომში დადგენილი უტოლობა.

თეორემა 2.5.2. ვთქვათ შესრულებულია თეორემა 2.5.1-ის პირობები, მაშინ

$$\Omega_r\left(f, \frac{1}{n}\right)_{q(.)} \leq c\left\{ \frac{1}{n^{2r}} \left(\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{\gamma(2r+s)-1} E_{\nu-1}^{\gamma}(f)_{p(.)} \right)^{\frac{1}{\gamma}} + \left(\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{\gamma s-1} E_{\nu}^{\gamma}(f)_{p(.)} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \right\}$$

სადაც დადებითი c მუდმივი არ არის დამოკიდებული f –ზე და n –ზე.

დამტკიცება. ვთქვათ, $2^m < n \leq 2^{m+1}$ გვაქვს

$$\begin{aligned} \Omega_r\left(f, \frac{1}{n}\right)_{q(.)} &\leq \Omega_r\left(f - S_{2^m}(f), \frac{1}{n}\right)_{q(.)} + \Omega_r\left(S_{2^m}(f), \frac{1}{n}\right)_{q(.)} \\ &\leq \|f - S_{2^m}(f)\|_{q(.)} + \Omega_r\left(S_{2^m}(f), \frac{1}{n}\right)_{q(.)} \\ &\leq cE_{2^m}(f)_{q(.)} + \Omega_r\left(S_{2^m}(f), \frac{1}{n}\right)_{q(.)} \qquad (2.5.2) \end{aligned}$$

მეორე შესაკრების მიმართ გამოვიყენოთ თეორემა 2.1.1. მივიღებთ

$$\Omega_r\left(S_{2^m}, \frac{1}{n}\right)_{q(.)} \leq cn^{-2r} \left\| S_{2^m}^{(2r)} \right\|_{q(.)}$$

რადგანაც

$$S_{2^m}^{(2r)}(f)=S_1^{(2r)}(f)+\sum_{\nu=0}^{m-1}(S_{2^{\nu+1}}^{(2r)}(f)-S_{2^\nu}^{(2r)}(f))$$

ამიტომ

$$\Omega_r\left(S_{2^m},\frac{1}{n}\right)_{q(.)}\leq cn^{-2r}(\left\|S_1^{(2r)}\right\|_{q(.)}+\left\|\sum_{\nu=0}^{m-1}\left(S_{2^{\nu+1}}^{(2r)}-S_{2^\nu}^{(2r)}\right)\right\|_{q(.)}) \qquad (2.5.3)$$

თუ გამოვიყენებთ თეორემა 2.5.1-ის დამტკიცებისას ლიტლვუდ-პელის თეორემაზე დაყრდნობით მომარჯვებულ მეთოდს, მივიღებთ,რომ

$$\left\|\sum_{\nu=0}^{m-1}\left(S_{2^{\nu+1}}^{(2r)}-S_{2^\nu}^{(2r)}\right)\right\|_{q(.)}\leq c(\sum_{\nu=0}^{m-1}\left\|S_{2^{\nu+1}}^{(2r)}-S_{2^\nu}^{(2r)}\right\|_{q(.)}^{\gamma})^{\frac{1}{\gamma}}$$

სადაც $\gamma=\min(2,q_-)$. მარჯვენა მხარეში გამოვიყენოთ ნიკოლსკის ტიპის უტოლობა, მივიღებთ

$$\left\|\sum_{\nu=0}^{m-1}\left(S_{2^{\nu+1}}^{(2r)}-S_{2^\nu}^{(2r)}\right)\right\|_{q(.)}\leq c(\sum_{\nu=0}^{m-1}2^{(\nu+1)\gamma s}\left\|S_{2^{\nu+1}}^{(2r)}-S_{2^\nu}^{(2r)}\right\|_{p(.)}^{\gamma})^{\frac{1}{\gamma}}$$
$$\leq c(\sum_{\nu=0}^{2m-1}2^{s(\nu+1)\gamma}\left\|S_{2^{\nu+1}}^{(2r)}-S_{2^\nu}^{(2r)}\right\|_{p(.)}^{\gamma})^{\frac{1}{\gamma}}$$

ახლა მარჯვენა მხარეში გამოვიყენოთ ბერნშტეინის უტოლობის ტიპის უტოლობა, მივიღებთ:

$$\left\|\sum_{\nu=0}^{m-1}\left(S_{2^{\nu+1}}^{(2r)}-S_{2^\nu}^{(2r)}\right)\right\|_{q(.)}\leq c(\sum_{\nu=0}^{m-1}2^{\nu(s+2r)\gamma}E_{2^\nu}^{\gamma}(f)_{p(.)})^{\frac{1}{\gamma}} \qquad (2.5.4)$$

ბერნშტეინის და ნიკოლსკის უტოლობების ძალით გვაქვს:

$$\left\|S_1^{(2r)}\right\|_{q(.)}=\left\|S_1^{(2r)}-S_0^{(2r)}\right\|_{q(.)}\leq\|S_1-S_0\|_{p(.)}\leq cE_0(f)_{p(.)}$$

ამგვარად,

$$\Omega_r\left(S_{2^m},\frac{1}{n}\right)_{q(.)}\leq cn^{-2r}(E_0(f)_{q(.)}+(\sum_{\nu=0}^{m-1}2^{\nu(s+2r)\gamma}E_{2^\nu}^{\gamma}(f)_{p(.)})^{\frac{1}{\gamma}})$$

ადვილი შესამჩნევია,რომ

$$2^{\nu(s+2r)\gamma}E_{2^\nu}^{\gamma}(f)_{p(.)} \le c \sum_{\mu=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu} \mu^{\gamma(s+2r)-1}E_{\mu}^{\gamma}(f)_{p(.)} \qquad \nu = 1,2,\dots$$

ამიტომ

$$\Omega_r\left(S_{2^m},\frac{1}{n}\right)_{q(.)} \le cn^{-2r}\left[E_0(f)_{q(.)} + 2^{2r}E_1(f)_{q(.)} + c\left(\sum_{\nu=0}^{m-1}\sum_{\mu=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu}\mu^{\gamma(s+2r)-1}E_{\mu}^{\gamma}(f)_{p(.)}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right]$$

$$\le cn^{-2r}\left\{E_0(f)_{p(.)} + \left(\sum_{\nu=1}^{2^m}\nu^{\gamma(s+2r)-1}E_{\nu}^{\gamma}(f)_{p(.)}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right\}$$

$$\le cn^{-2r}\left(\sum_{\nu=0}^{2^m-1}(\nu+1)^{\gamma(s+2r)-1}E_{\nu}^{\gamma}(f)_{p(.)}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

იმის გამო, რომ $2^m < n \le 2^{m+1}$, გვექნება

$$\Omega_r\left(S_{2^m},\frac{1}{n}\right)_{q(.)} \le cn^{-2r}\left(\sum_{\nu=0}^{n}(\nu+1)^{\gamma(s+2r)-1}E_{\nu}^{\gamma}(f)_{p(.)}\right)^{\frac{1}{\gamma}}_{q(.)} \qquad (2.5.5)$$

თუ გამოვიყენებთ (2.5.2),(2.5.5) და (2.5.1)-ს, მივიღებთ სასურველ შეფასებას.

შენიშვნა. თუ $A_k(x,f) = a_k(f)coskx + b_k(f)sinkx$ მაშინ გვაქვს

$$A_k(x,f) = A_k\left(x+\frac{\alpha\pi}{2},f\right)cos\frac{\alpha\pi}{2} + A_k\left(x+\frac{\alpha\pi}{2},\tilde{f}\right)sin\frac{\alpha\pi}{2}$$

და

$$A_k(x,f^{\alpha}) = k^{\alpha}A_k\left(x+\frac{\alpha\pi}{2},f\right)$$

§2.6 შებრუნებული ტიპის უტოლობები წილადური რიგით წარმოებადი ფუნქციებისათვის

სანამ მოვიყვანდეთ ფუნქციის დადებითი რიგის წარმოებულის სიგლუვის მოდულის შეფასებას გამოსავალი ფუნქციის საუკეთესო მიახლოების საშუალებით, დავამტკიცოთ ზოგიერთი დამხმარე დებულება.

შემდგომში $W_{p(.)}^{\alpha}(\mathbb{T})$-თი აღვნიშნავთ $L^{p(.)}$ სივრცის იმ ელემენტების სიმრავლეს, რომელთა α რიგის წარმოებულები $f^{(\alpha)} \in L^{p(.)}$.

ლემა 2.6.1. ვთქვათ, $p \in \mathbb{P} \cap \mathbb{P}^{log}$. ყოველი $f \in W^{\alpha}_{p(.)}$ ფუნქციისათვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$E_n(f)_{p(.)} \leq \frac{c}{(n+1)^{\alpha}} E_n(f^{\alpha}),$$

სადაც c არ არის დამოკიდებული f-ზე და n-ზე,

დამტკიცება. ამ ლემის დამტკიცებისას არსებითად დავეყრდნობით იმ ფაქტს, რომ თუ $f \in L^{p(.)}(\mathbb{T}), p \in \mathbb{P} \cap \mathbb{P}^{log}$, მაშინ

$$\|f - S_n(x,f)\|_{p(.)} \leq cE_n(f)$$

სადაც S_n აღნიშნავს f ფუნქციის ფურიეს მწკრივის კერძო ჯამებს.

გვაქვს

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(x,f),$$

სადაც $A_k(x,f) = a_k \cos kx + b_k \sin kx \, , k = 1,2, \dots \, , A_0(x,f) = \frac{a_0}{2}$

ზემოთ დაწერილი ტოლობა მართებულია როგორც ნორმით კრებადობის, ასევე თითქმის ყველგან კრებადობის აზრით. ვინაიდან $f \in L^{p(.)}$, ამიტომ $f \in L^{p_-}$. ჰანტის თეორემის ძალით, ერთზე მეტი მაჩვენებლით ლებეგის სივრცის ნებისმიერი ფუნქციის ფურიეს მწკრივი თითქმის ყველგან კრებადია.

შემდგომ გვაქვს

$$\begin{aligned} A_k(x,f) &= a_k \cos k\left(x + \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\alpha\pi}{2}\right) + b_k \sin k\left(x + \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\alpha\pi}{2}\right) \\ &= A_k\left(x + \frac{\alpha\pi}{2k}, f\right) \cos\frac{\alpha\pi}{2} + A_k\left(x + \frac{\alpha\pi}{2k}, \tilde{f}\right) \sin\frac{\alpha\pi}{2} \end{aligned}$$

და

$$A_k\left(x, f^{(\alpha)}\right) = k^{\alpha} A_k\left(x + \frac{\alpha\pi}{2k}, f\right).$$

ამიტომ

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} A_k(x,f) &= A_0(x,f) + \cos\frac{\alpha\pi}{2} \sum_{k=1}^{\infty} A_k\left(x + \frac{\alpha\pi}{2k}, f\right) + \sin\frac{\alpha\pi}{2} \sum_{k=1}^{\infty} A_k\left(x + \frac{\alpha\pi}{2k}, \tilde{f}\right) \\ &= A_0(x,f) + \cos\frac{\alpha\pi}{2} \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\alpha} A_k\left(x, f^{(\alpha)}\right) + \sin\frac{\alpha\pi}{2} \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\alpha} A_k\left(x, \tilde{f}^{(\alpha)}\right) \end{aligned}$$

აქედან

$$f(x)-S_n(x,f)=\cos\frac{\alpha\pi}{2}\sum_{k=n+1}^{\infty}k^{-\alpha}A_k\left(x,f^{(\alpha)}\right)+\sin\frac{\alpha\pi}{2}\sum_{k=n+1}^{\infty}k^{-\alpha}A_k\left(x,\tilde{f}^{(\alpha)}\right).$$

აბელის გარდამნით მივიღებთ:

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}k^{-\alpha}A_k\left(x,f^{(\alpha)}\right)=\sum_{k=n+1}^{\infty}k^{-\alpha}\left[\left(S_k\left(x,f^{(\alpha)}\right)-f^{(\alpha)}(x)\right)-\left(S_{k-1}\left(x,f^{(\alpha)}\right)-f^{(\alpha)}(x)\right)\right]$$
$$=\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(k^{-\alpha}-(k+1)^{-\alpha}\right)\left(S_k\left(x,f^{(\alpha)}\right)-f^{(\alpha)}\right)$$
$$-(n+1)^{-\alpha}\left(S_n\left(x,f^{(\alpha)}\right)-f^{(\alpha)}(x)\right)$$

ანალოგიურად,

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}k^{-\alpha}A_k\left(x,\tilde{f}^{(\alpha)}\right)$$
$$=\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(k^{-\alpha}-(k+1)^{-\alpha}\right)\left(S_k\left(x,\tilde{f}^{(\alpha)}\right)-\tilde{f}^{(\alpha)}(x)\right)$$
$$-(n+1)^{-\alpha}\left(S_n\left(x,\tilde{f}^{(\alpha)}\right)-\tilde{f}^{(\alpha)}(x)\right)$$

ამიტომ

$$\|f(x)-S_n(x,f)\|_{p(.)}$$
$$\le c\left[\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(k^{-\alpha}-(k+1)^{-\alpha}\right)E_k\left(f^{(\alpha)}\right)_{p(.)}+(n+1)^{-\alpha}E_n\left(f^{(\alpha)}\right)_{p(.)}\right]$$
$$+c\left[\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(k^{-\alpha}-(k+1)^{-\alpha}\right)E_k\left(\tilde{f}^{(\alpha)}\right)+(n+1)^{-\alpha}E_n\left(f^{(\alpha)}\right)_{p(.)}\right]$$

აქედან

$$\|f(x)-S_n(x,f)\|_{p(.)}\le c\left[\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(k^{-\alpha}-(k+1)^{-\alpha}\right)+(n+1)^{-\alpha}\right]\times\left[E_k\left(f^{(\alpha)}\right)_{p(.)}+E_n\left(\tilde{f}^{(\alpha)}\right)_{p(.)}\right]$$
$$\le cE_n\left(f^{(\alpha)}\right)_{p(.)}\left[\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(k^{-\alpha}-(k+1)^{-\alpha}\right)+(n+1)^{-\alpha}\right]\le\frac{c}{(n+1)^{\alpha}}E_n\left(f^{(\alpha)}\right)_{p(.)}$$

ლემა დამტკიცებულია.

ზემოთ დამტკიცებისას ჩვენ გამოვიყენეთ, რომ

$$E_n\left(\tilde{f}^{(\alpha)}\right) = E_n\left(\widetilde{f^{(\alpha)}}\right) \le cE_n\left(f^{(\alpha)}\right)$$

პირველი ტოლობა გამომდინარეობს განსაზღვრიდან , ხოლო მეორე შეუღლებული ფუნქციის შემოსაზღვრულობიდან $L^{p(.)}$ სივრცეში, როცა $p \in \mathbb{P} \cap \mathbb{P}^{log}$.

თეორემა 2.6.1. ვთქვათ, $p \in \mathbb{P}^{log} \cap \mathbb{P}$, $\alpha \in R_0^+$, მაშინ ყოველი $f \in W_{p(.)}^{\alpha}(\mathbb{T})$ ფუნქციისათვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$\left\|f^{(\alpha)} - S_n^{(\alpha)}\right\|_{p(.)} \le cE_n(f^{(\alpha)})_{p(.)}, \qquad (2.6.1)$$

სადაც დადებითი მუდმივი c არ არის დამოკიდებული n −ზე და f −ზე.

დამტკიცება. განვიხილოთ f ფუნქციის ვალე-პუსენის საშუალოები

$$W_n(f) := W_n(x,f) := \frac{1}{n+1}\sum_{\nu=n}^{2n} S_\nu(x,f)\,, \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

რადგან

$$W_n\left(\cdot,f^{(\alpha)}\right) = W_n^{(\alpha)}(\cdot,f),$$

ამიტომ

$$\begin{aligned}\left\|f^{(\alpha)} - S_n^{(\alpha)}\right\|_{p(.)} &\\ &\le \left\|f^{(\alpha)} - W_n\left(\cdot,f^{(\alpha)}\right)\right\|_{p(.)} + \left\|S_n^{(\alpha)}(\cdot,W_n(f)) - S_n^{(\alpha)}(\cdot,f)\right\|_{p(.)} \\ &+ \left\|W_n^{(\alpha)}(\cdot,f) - S_n^{(\alpha)}\left(\cdot,W_n(f)\right)\right\|_{p(.)} = I_1 + I_2 + I_3\end{aligned}$$

ცხადია, რომ $\{W_n\}$ ოპერატორთა ოჯახი თანაბრად შემოსაზღვრულია $L^{p(.)}$ სივრცეში, ამიტომ გვექნება

$$\begin{aligned}I_1 &\le \left\|f^{(\alpha)} - S_n^{(\alpha)}(\cdot,f^{(\alpha)})\right\|_{p(.)} + \left\|S_n^{(\alpha)}\left(\cdot,f^{(\alpha)}\right) - W_n\left(\cdot,f^{(\alpha)}\right)\right\|_{p(.)} \\ &\le E_n(f^{(\alpha)})_{p(.)} + \left\|W_n(\cdot,S_n^{(\alpha)} - f^{(\alpha)})\right\|_{p(.)} \le E_n(f^{(\alpha)})_{p(.)} + c\left\|(f^{(\alpha)} - S_n^{(\alpha)})\right\|_{p(.)} \\ &\le (c+1)E_n(f^{(\alpha)})_{p(.)}\end{aligned}$$

I_2 და I_3 −ის შესაფასებლად გამოვიყენოთ ბერშტეინის ტიპის უტოლობა

გვექნება

$$I_2 \le cn^{\alpha}\|S_n(W_n(f)) - S_n(f)\|_{p(.)} \qquad (2.6,2)$$

და

$$I_3 \le cn^{\alpha}\|W_n(f) - S_n(W_n(f))\|_{p(.)} \le cn^{\alpha}E_n\big(W_n(f)\big)_{p(.)} \quad (2.6.3)$$

მეორეს მხრივ,

$$\|S_n(W_n(f)) - S_n(f)\|_{p(.)} \le \big\|S_n\big(W_n(f)\big) - W_n(f)\big\|_{p(.)} + \|W_n(f) - f\|_{p(.)} + \|f - S_n(f)\|_{p(.)}$$
$$\le c(E_n\big(W_n(f)\big)_{p(.)} + E_n(f)_{p(.)} + E_n(f)_{p(.)}$$

რადგან

$$E_n(W_n)_{p(.)} \le cE_n(f)_{p(.)}$$

ამიტომ გვექნება შემდეგი შეფასებები:

$$\left\|f^{(\alpha)} - S_n^{(\alpha)}(f)\right\|_p \le c(E_n\big(f^{(\alpha)}\big)_{p(.)} + n^{\alpha}E_n(W_n)_{p(.)} + n^{\alpha}E_n(f)_{p(.)} + n^{\alpha}E_n(W_n)_{p(.)})$$
$$\le c(E_n\big(f^{(\alpha)}\big)_{p(.)} + n^{\alpha}E_n(f)_{p(.)})$$

მაგრამ თუ გავითვალისწინებთ, რომ

$$E_n(f)_{p(.)} \le cn^{-\alpha}E_n\big(f^{(\alpha)}\big)_{p(.)},$$

საბოლოოდ მივიღებთ:

$$\left\|f^{(\alpha)} - S_n^{(\alpha)}(f)\right\|_{p(.)} \le cE_n\big(f^{(\alpha)}\big)_{p(.)}$$

თეორემა 2.6.2. ვთქვათ, 2π პერიოდული $p(x)$და $q(x)$ ფუნქციები მიეკუთვნებიან $\mathbb{P}^{log} \cap \mathbb{P}$ კლასს. დავუშვათ, რომ

$$\frac{1}{q(x)} = \frac{1}{p(x)} - s, \quad x \in \mathbb{T}.$$

ვიგულისხმოთ, რომ $p_- < \frac{1}{s}$, სადაც s არის დადებითი რიცხვი. თუ რაიმე $\alpha > 0$-სთვის შესრულებულია პირობა

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{(\alpha+s)\gamma-1}\, E_{\nu}^{\gamma}(f)_{p(.)} < \infty, \qquad \gamma = \min(2, q_-) \qquad (2.6.4)$$

მაშინ $f^{(\alpha)} \in L^{q(.)}(\mathbb{T})$.

დამტკიცება. ჩვენი მიზანია, ვაჩვენოთ, რომ თუ შესრულებულია (2.6.4) პირობა, მაშინ ტრიგონომეტრიული მწკრივი

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{\alpha}\left(a_k \cos k\left(x + \frac{\pi\alpha}{2k}\right) + b_k \sin k\left(x + \frac{\pi\alpha}{2}\right)\right) \qquad (2.6.5)$$

საშუალოდ კრებადია რაიმე $\varphi \in L^{q(.)}(\mathbb{T})$ ფუნქციისკენ და, მაშასადამე, წარმოადგენს მის ფურიეს მწკრივს. ეს კი ნიშნავს, რომ არსებობს $f^{(\alpha)} \in L^{p(.)}(\mathbb{T}), \varphi \in f^{(\alpha)}$ როგორც უკვე აღნიშნული გვქონდა

$$a_k \operatorname{cosk}\left(x+\frac{\pi\alpha}{2k}\right)+b_k sink\left(x+\frac{\pi\alpha}{2}\right)=A_k\left(x+\frac{\pi\alpha}{2},f\right)$$

ახლა დავამტკიცოთ,რომ (2.6.5) მწკრივი, ან რაც იგივეა

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{\alpha} A_k^{(\alpha)}(x,f)$$

საშუალოდ კრებადია $L^{q(.)}(\mathbb{T})$ სივრცეში. ვთქვათ $n>m$ და $[2^l,2^{l+1}],[2^t,2^{t+1})$, არის ის უმცირესი ორადული ინტერვალები, რომელთათვისაც $n \in [2^l,2^{l+1})$ და $m \in [2^t,2^{t+1})$ მაშინ

$$\left\|\sum_{k=m}^{n} A_k^{(\alpha)}(x,f)\right\|_{q(.)} \leq \left\|\sum_{k=2^l}^{2^{t+1}-1} A_k^{(\alpha)}(x,f)\right\|_{q(.)}+\left\|\sum_{k=2^l}^{m-1} A_k^{(\alpha)}(x,f)\right\|_{q(.)}+\left\|\sum_{k=n+1}^{2^{t+1}-1} A_k^{(\alpha)}(x,f)\right\|_{q(.)}$$
$$=I_1+I_2+I_3$$

ცვლადმაჩენებლიან ლებეგის სივრცეში ლიტლვუდ-პელის თეორემის გამოყენებით მივიღებთ:

$$I_1=\left\|\sum_{\mu=l}^{t}\sum_{j=2^{\mu}}^{2^{\mu+1}-1} A_j^{(\alpha)}(x,f)\right\|_{q(.)} \leq c\left\|\left(\sum_{\mu=l}^{t}\left|\sum_{j=2^{\mu}}^{2^{\mu+1}-1} A_j^{(\alpha)}(x,f)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{q(.)}$$

2.5.1 და 2.5.2 ლემების გამოყენებით, როგორც თეორემა 2.5.1-ის დამტკიცებისას, მივიღებთ

$$I_1=c\left(\sum_{\mu=l}^{t}\left\|\sum_{j=2^{\mu}}^{2^{\mu+1}-1} A_j^{(\alpha)}(x,f)\right\|_{q(.)}^{\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma}}=c\left(\sum_{\mu=l}^{t}\left\|\sum_{j=2^{\mu}}^{2^{\mu+1}-1} A_j(x,f)^{(\alpha)}\right\|_{q(.)}^{\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

ახლა გამოვიყენოთ ბერშტეინისა და ნიკოლსკის უტოლობების ტიპის უტოლობები. მაშინ გვექნება

$$I_1 \le c(\sum_{\mu=l}^{t} 2^{(\mu+1)(\alpha+s)\gamma} \left\| \sum_{j=2^\mu}^{2^{\mu+1}-1} A_j(x,f) \right\|_{q(.)}^{\gamma})^{\frac{1}{\gamma}} \le c(\sum_{\mu=l}^{t} 2^{\mu(\alpha+s)\gamma} E_{2^\mu}^{\gamma}(f))^{\frac{1}{\gamma}}$$

თეორემის პირობის ძალით, მიღებული ჯაჭვ-უტოლობიდან მეორე უტოლობის მარჯვენა მხარე მიისწრაფვის ნულისკენ. რაც შეეხება I_2 და I_3 , მათი შეფასებები ერთიდაიგივე მოსაზრებას ეყრდნობა. მართლაც, ბერშტეინისა და ნიკოლსკის უტოლობების ტიპის უტოლობების ძალით გვაქვს

$$I_2 = \left\| \sum_{k=2^l}^{m-1} A_k^{(\alpha)}(x,f) \right\|_{q(.)} \le cm^{\alpha+s} \left\| \sum_{k=2^l}^{m-1} A_k(x,f) \right\|_{p(.)} \le c2^{(l+1)(\alpha+s)} E_{2^l}(f)_{p(.)}$$

მაგრამ (2.6.4) მწკრივის კრებადობის გამო გვაქვს

$$\lim_{l\to\infty} 2^{l(\alpha+s)} E_{2^l}(f)_{p(.)} = 0$$

ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ

$$\lim_{n\to\infty} I_3 = 0$$

ამგვარად, დამტკიცებულია,რომ

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} \left\| \sum_{k=m}^{n} A_k^{(\alpha)}(x,f) \right\|_{q(.)} = 0$$

რაც იმას ნიშნავს,რომ (2.6.5) მწკრივი საშუალოდ კრებადია $L^{q(.)}(\mathbb{T})$ სივრცეში და, მაშასადამე, წარმოადგენს რაიმე $\varphi \in L^{q(.)}(\mathbb{T})$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივს. განსაზღვრის თანახმად, φ ფუნქციას ვუწოდებთ $f^{(\alpha)}$ წარმოებულს. ამგვარად, $f^{(\alpha)} \in L^{q(.)}(\mathbb{T})$

თეორემა 2.6.3. ვთქვათ, 2π პერიოდული $p(x)$და $q(x)$ ფუნქციები მიეკუთვნებიან $\mathbb{P}^{log} \cap \mathbb{P}$ კლასს. დავუშვათ, რომ

$$\frac{1}{q(x)} = \frac{1}{p(x)} - s, \;\; x \in \mathbb{T}.$$

სადაც s არის დადებითი მუდმივი. ვიგულისხმოთ, რომ $p_+ < \frac{1}{s}$. თუ რაიმე $\alpha > 0$ რიცხვისათვის შესრულებულია (2.6.4) პირობა, მაშინ ადგილი აქვს შემდეგ უტოლობებს:

$$E_n(f^{(\alpha)})_{q(.)} \le c \left\{ n^{\alpha+s} E_n(f)_{p(.)} + \left(\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{\gamma(\alpha+s)-1} E_\nu^{\gamma}(f)_{p(.)} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \right\} \qquad (2.6.6)$$

და

$$\Omega_r(f^{(\alpha)},\frac{1}{n})_{q(.)} \le c\left\{\frac{1}{n^{2r}}\left(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\gamma(2r+s+\alpha)-1}\,E_{\nu-1}^{\gamma}(f)_{p(.)}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right.$$

$$\left.+\left(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{\gamma(\alpha+s)-1}\,E_{\nu}^{\gamma}(f)_{p(.)}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right\} \qquad (2.6.7)$$

სადაც c მუდმივი არ არის დამოკიდებული f –ზე და n –ზე

დამტკიცება. ვთქვათ, $2^m < n \le 2^{m+1}$. თეორემა 2.6.2-ის თანახმად თუ შესრულებულია (2.6.4) პირობა, მაშინ არსებობს $f^{(\alpha)} \in L^{q(.)}(\mathbb{T})$. ჩვენ გვაქვს

$$E_n\left(f^{(\alpha)}\right)_{q(.)} \le c\left\|f^{(\alpha)} - S_n\left(f^{(\alpha)}\right)\right\|_{q(.)}$$

$$\le \left\|S_{2^{m+2}}(f^{(\alpha)}) - S_n\left(f^{(\alpha)}\right)\right\|_{q(.)} + \left\|\sum_{k=m+2}^{\infty}[S_{2^{k+1}}(f^{(\alpha)}) - S_{2^k}\left(f^{(\alpha)}\right)]\right\|_{q(.)} \quad (2.6.8)$$

თუ გამოვიყენებთ ბერშტეინისა და ნიკოლსკის უტოლობების ტიპის უტოლობებს, მივიღებთ, რომ

$$\left\|S_{2^{m+2}}(f^{(\alpha)}) - S_n\left(f^{(\alpha)}\right)\right\|_{q(.)} \le c2^{(m+1)(\alpha+s)}E_n(f)_{p(.)} \le c(n+1)^{(\alpha+s)}E_n(f)_{p(.)} \quad (2.6.9)$$

ცვლადმაჩვენებლიანი ლებეგის სივრცეებისათვის ლიტლვუდ-პელის თეორემის, ნიკოლსკისა და ბერშტეინის ტიპის უტოლობების გამოყენებით, ისევე როგორც თეორემა 2.6.2-ის დამტკიცების დროს, მივიღებთ

$$\left\|\sum_{k=m+2}^{\infty}(S_{2^{k+1}}(f^{(\alpha)}) - S_{2^k}\left(f^{(\alpha)}\right))\right\|_{q(.)} \le (\sum_{k=m+2}^{\infty} 2^{\alpha k(\alpha+s)}\,E_{2^k}^{\gamma}(f)_{p(.)})^{\frac{1}{\gamma}}$$

ამიტომ ყოველიn – ისთვის $2^m < n \le 2^{m+1}$ გვექნება

$$\left\|\sum_{k=m+2}^{\infty}[S_{2^{k+1}}(f^{(\alpha)}) - S_{2^k}\left(f^{(\alpha)}\right)]\right\|_{q(.)} \le (\sum_{k=n+1}^{\infty} k^{\alpha(\alpha+s)-1}\,E_{k}^{\gamma}(f)_{p(.)})^{\frac{1}{\gamma}} \quad (2.6.10)$$

და, ბოლოს,(2.6.9) და (2.6.10)-ის საშუალებით დავასკვნით (2.6.6) უტოლობის მართებულობას.

(2.6.7) უტოლობის დამტკიცებას არ მოვიყვანთ,რადგან იგი მტკიცდება თეორემა 2.5.2-ის დამტკიცების სრული ანალოგიით რეალიზაციის უტოლობის, ლიტლვუდ-პელის

დეკომპოზიციის, ბერშტეინისა და ნიკოლსკის უტოლობების ტიპის უტოლობების გამოყენებით. მოვიყვანოთ (2.6.7) უტოლობის ერთი

შედეგი. ვთქვათ, თეორემა 2.6.3 -ის პირობებში

$$E_n(f)_{p(.)} = O\left(\frac{1}{n^{2r+s}}\right), s = \frac{1}{p(x)} - \frac{1}{q(x)} \ ,x \in \mathbb{T}$$

მაშინ

$$\Omega_r(f, \frac{1}{n})_{q(.)} = O(\frac{(lnn)^{\frac{1}{\gamma}}}{n^{2r}}) \cdot$$

§2.7 ფუნქციათა ტრიგონომეტრიული პოლინომებით მიახლოების საკითხები $L^{p(.)}$ სივრცეში, როცა $p_- = 1$

ამ პარაგრაფში შევისწავლით შემდეგ ამოცანას: ვთქვათ $p \in \mathbb{P}_0$. რა პირობებს უნდა აკმაყოფილებდეს $f \in L^{p(.)}(T)$ ფუნქცია იმისათვის,რომ მას გააჩნდეს r −რიგის წარმოებული და $f^{(r)} \in L^{p(.)}(T)$. ამავე დროს დადგენილია უტოლობები რომლებიც $f^{(r)}$ ფუნქციის საუკეთესო მიახლოებას და სიგლუვის მოდულს აფასებენ f-ის შესაბამისი კონსტუქციული მახასიათებლებით.

ჩვენი შედეგის მისაღებად დაგვჭირდება შემდეგი.

ლემა 2.7.1. ვთქვათ, $p \in \mathbb{P}_0$, აბსოლუტურად უწყვეტ ფუნქციათა $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ მიმდევრობა კრებადია $L^{p(.)}(T)$ სივრცის ნორმით $f(x)$ ფუნქციისკენ.ამასთანავე, ვიგულისხმოთ,რომ $\{f_n'\}_{n=1}^{\infty}$ მიმდევრობა კრებადია $L^{p(.)}$ სივრცის ნორმით რაიმე $g(x)$ ფუნქცისკენ,მაშინ f ფუნქცია აბსოლუტურად უწყვეტია და $f'(x) = g(x)$ თითქმის ყველგან.

დამტკიცება. ვინაიდან

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{p(.)} = 0$$

ამიტომ

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{p_-} = 0$$

უკანასკნელი ტოლობის გამო $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ მიმდევრობიდან გამოიყოფა ისეთი ქვემიმდევრობა$\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, რომ ეს უკანასკნელი თითქმის ყველგან იქნება კრებადი $f(x)$ ფუნქციისკენ.

ვთქვათ, x_0 არის კრებადობის წერტილი. ცხადია,

$$\left|\int_{x_0}^{x} f'_{n_k}(t)dt - \int_{x_0}^{x} g(t)dt\right| \leq c\left\|f'_{n_k} - g\right\|_{p(.)}$$

თეორემის პირობებიდან ვასკვნით,რომ

$$\lim_{k\to\infty}\int_{x_0}^{x} f'_{n_k}(t)dt = \int_{x_0}^{x} g(t)dt$$

აქედან

$$\int_{x_0}^{x} g(t)dt = \lim_{k\to\infty}\int_{x_0}^{x} f'_{n_k}(t)dt = \lim_{k\to\infty}\left(f_{n_k}(x) - f_{n_k}(x_0)\right) = f(x) - f(x_0)$$

ამგვარად,

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} g(t)dt$$

ე.ი $f'(x) = g(x)$ თითქმის ყველგან.

თეორემა 2.7.1. ვთქვათ, $p \in \mathbb{P}_0 \cap \mathbb{P}^{log}$. თუ მწკრივი

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1} E_n(f)_{p(.)} \qquad (r > 0) \tag{2.7.1}$$

კრებადია, მაშინ $f^{(r)} \in L^{p(.)}(\mathbb{T})$ და ადგილი აქვს შეფასებას

$$E_n(f^{(r)})_{p(.)} \leq c\left(n^r E_n(f)_{p(.)} + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{r-1} E_\nu(f)_{p(.)}\right) \tag{2.7.2}$$

სადაც c არ არის დამოკიდებული n –ზე და f –ზე.

დამტკიცება. ჯერ მოვიყვანოთ თეორემის დამტკიცება ნატურალური r-სთვის. ვთქვათ, $T_n(x)$ არის $f \in L^{p(.)}$ ფუნქციის საუკეთესო მიახლოების პოლინომი

$$E_n(f)_{p(.)} = \|f - T_n\|_{p(.)}$$

რადგანაც

$$\lim_{k\to\infty} E_n(f) = 0$$

ამიტომ ყოველი ზრდადი $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$ მიმდევრობისთვის $L^{p(.)}$ სივრცის აზრით ადგილი აქვს ტოლობას

$$f(x) = T_{n_0}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[T_{n_k}(x) - T_{n_{k-1}}(x)\right] \qquad (2.7.3)$$

დავაფიქსიროთ n ნატურალური რიცხვი და ავიღოთ $n_k = 2^k n \quad (k = 0,1,2,,\dots)$ მაშინ

$$f(x) - T_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \Gamma_{\mathrm{k}}(x) \qquad (2.7.4)$$

სადაც

$$\Gamma_{\mathrm{k}}(x) = T_{2^k n}(x) - T_{2^{k+1} n}(x)$$

დავამტკიცოთ,რომ მწკრივი

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Gamma_{\mathrm{k}}^{(\mathrm{r})}(x) \qquad (2.7.5)$$

კრებადია $L^{p(.)}$ სივრცის ნორმით.

გვაქვს

$$\|\Gamma_{\mathrm{k}}\|_{p(.)} \le \left\|T_{2^k n} - f\right\|_{p(.)} + \left\|f - T_{2^{k+1} n}\right\|_{p(.)} \le 2E_{2^k n} \qquad (2.7.6)$$

თუ გამოვიყენებთ ბერშტეინის ტიპის უტოლობას, მაშინ (2.7.5)-ის გათვალისწინებით მივიღებთ

$$\left\|\Gamma_{\mathrm{k}}^{(\mathrm{r})}\right\| \le (2^k n)^r \|\Gamma_{\mathrm{k}}\| \le c(2^k n)^r E_{2^k n}$$

ამ შეფასების გამოყენებით გვექნება

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\|\Gamma_{\mathrm{k}}^{(\mathrm{r})}\right\|_{p(.)} \le c \sum_{k=1}^{\infty} (2^k n)^r E_{2^k n}(f)_{p(.)} = c\{2^r n^r E_n + \sum_{k=1}^{\infty} (2^{k+1} n)^r E_{2^k n}(f)_{p(.)}\}$$

მეორეს მხრივ, $E_k(f)$ –ის მონოტონურობის გამო

$$(2^{k+1} n)^r E_{2^k n} \le c \sum_{\mu = 2^{k-1} n + 1}^{2^k n} \mu^{r-1} E_\mu(f)_{p(.)}$$

ამიტომ

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left\|\Gamma_{\mathrm{k}}^{(\mathrm{r})}\right\|_{p(.)} \leq c\left[n^r E_{n+1}(f)_{p(.)}+\sum_{\mu=n+1}^{\infty} \mu^{r-1} E_\mu(f)_{p(.)}\right] \tag{2.7.7}$$

აქედან

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left\|\Gamma_{\mathrm{k}}^{(\mathrm{r})}\right\|_{p(.)} \leq \infty$$

ამგვარად, (2.7.5) მწკრივი კრებადია $L^{p(.)}$ სივრცის ნორმით რაიმე $g(x)$ ფუნქციისკენ. თუ გამოვიყენებთ ლემა 2.7.1-ს დავასკვნით, რომ $f^{(r)}(x)$ თითქმის ყველგან არსებობს და $f^{(r)} \in L^{p(.)}$.ამასთანავე, დამტკიცებულის თანახმად,

$$f^{(r)}(x)-T_n{}^{(r)}(x)=\sum_{k=1}^{\infty} \Gamma_{\mathrm{k}}^{(\mathrm{r})}(x)$$

$L^{p(.)}$ სივრცის ნორმით კრებადობის აზრით.

აქედან და (2.7.7)-დან მივიღებთ

$$\left\|f^{(r)}(x)-T_n{}^{(r)}(x)\right\|_{p(.)} \leq \sum_{k=1}^{\infty}\left\|\Gamma_{\mathrm{k}}^{(\mathrm{r})}\right\|_{p(.)} \leq c\left\{n^r E_n(f)_{p(.)}+\sum_{\mu=n+1}^{\infty} \mu^{r-1} E_\mu(f)_{p(.)}\right\}$$

ამ უკანასკნელი უტოლობიდან გამომდინარეობს (2.7.2).

თეორემის მართებულობის დასადგენად ნებისმიერი $r>0$-ისათვის საკმარისია გამოვიყვანოთ ბერნშტეინ-ზიგმუნდის უტოლობის ტიპის უტოლობა ტრიგონომეტრიული პოლინომის წილადური რიგის წარმოებულისათვის.

თეორემა 2.7.2. თუ $p \in \mathbb{P}^{log} \cap \mathbb{P}_0$ და $r>0$, მაშინ ადგილი აქვს უტოლობას

$$\left\|T_n^{(r)}\right\|_{p(.)} \leq c n^r\|T_n\|_{p(.)},$$

სადაც დადებითი c მუდმივი არ არის დამოკიდებული T_n-ზე და n-ზე.

დამტკიცება: ჯერ ვიგულისხმოთ, რომ $0<r<1$. ცნობილია, რომ ტრიგონომეტრიული პოლინომის ვეილის წარმოებული ემთხვევა მარშოს აზრით წარმოებულს. ეს უკანასკნელი კი შემდეგნაირად წარმოიდგინება

$$T_n^{(r)}(x)=\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{\infty} \frac{T_n(x)-T_n(x-t)}{t^{1+r}} d t,$$

(იხ, მაგალითად, [40] §19, პუნქტი 4^0)

სადაც Γ-თი აღნიშნულია ეილერის ფუნქცია.

გადავწეროთ ეს გამოსახულება შემდეგნაირად

$$T_n^{(r)}(x)=\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\int_0^{\frac{2}{n}}\frac{T_n(x)-T_n(x-t)}{t^{1+r}}dt+\int_{\frac{2}{n}}^{\infty}\frac{T_n(x)-T_n(x-t)}{t^{1+r}}dt\right)=\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}(I_1+I_2)$$

მინკოვსკის ტიპის უტოლობის გამოყენებით $L^{p(.)}$ სივრცეებისათვის გვაქვს

$$\|I_1\|_{p(.)}\leq\int_0^{\frac{2}{n}}\|T_n(x)-T_n(x-t)\|_{p(.)}\frac{dt}{t^{1+r}}=\int_0^{\frac{2}{n}}\left\|\frac{1}{t}\int_{x-t}^{x}T_n'(u)du\right\|_{p(.)}\frac{dt}{t^r}$$

თუ გამოვიყენებთ ი.შარაპუდინოვის თეორემას სტეკლოვის საშუალოების ნორმების ერთობლივ შემოსაზღვრულობის შესახებ $L^{p(.)}$ სივრცეში (იხ. დებულება 1.5.6), როცა $p\in\mathbb{P}^{log}\cap\mathbb{P}_0$, მაშინ გვექნება

$$\|I_1\|_{p(.)}\leq c\int_0^{\frac{2}{n}}\|T_n'\|_{p(.)}\frac{dt}{t^r}.$$

მთელი რიგის წარმოებულებისათვის ბერნშტეინ-ზიგმუნდის უტოლობის ტიპის უტოლობით (იხ. დებულება 2.3.1, 1.5.8) კი მივიღებთ:

$$\|I_1\|_{p(.)}\leq cn\|T_n\|_{p(.)}\frac{1}{n}n^r=cn^r\|T_n\|_{p(.)}.$$

და, ბოლოს

$$\|I_2\|_{p(.)}\leq\int_{\frac{2}{n}}^{\infty}\|T_n(x)-T_n(x-t)\|_{p(.)}\frac{dt}{t^{1+r}}\leq 2\|T_n\|_{p(.)}n^r.$$

ვინაიდან $T_n^{(r)}(x)$, $(0<r<1)$ წარმოადგენს იმავე რიგის ტრიგონომეტრიულ პოლინომს, რისაც $T_n(x)$, ამიტომ ნებისმიერი $r>0$-ისათვის სათანადო უტოლობის მართებულობა ცხადია.

თუ გამოვიყენებთ წილადური წარმოებულისთვის ზემოთ დამტკიცებულ ბერნშტეინ-ზიგმუნდის ტიპის უტოლობას და გავიმეორებთ თეორემა 2.7.1-ში მოყვანილ დამტკიცებას, მაშინ მივალთ 2.7.2 უტოლობამდე.

თეორემა 2.7.3. ვთქვათ, $p \in \mathbb{P}_0 \cap \mathbb{P}^{log}$, მაშინ ყოველი $f \in L^{p(.)}$-სთვის ადგილი აქვს შებრუნებულ უტოლობას

$$\Omega_k\left(f,\frac{1}{n}\right)_{p(.)} \le \frac{c}{n^{2k}}\left(\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{2k-1} E_{\nu-1}(f)_{p(.)}\right)$$

ხოლო თუ შესრულებულია (2.7.1) პირობა, მაშინ ნებისმიერი $r > 0$ - სთვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$\Omega_k\left(f^{(r)},\frac{1}{n}\right)_{p(.)} \le\ c\left\{\frac{1}{n^{2k}}\left(\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{2k+r-1} E_{\nu-1}(f)_{p(.)}\right) + \left(\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{r-1} E_{\nu}(f)_{p(.)}\right)\right\} \quad (2.7.8)$$

ამ უტოლობებში c მუდმივი არ არის დამოკიდებული n –ზე და f –ზე.

მოვიყვანოთ თეორემის დამტკიცება ფუნქციის წარმოებულისათვის. დასამტკიცებლად ჩვენ დაგვჭირდება შემდეგი

ლემა 2.7.2. ვთქვათ, $p \in \mathbb{P}_0 \cap \mathbb{P}^{log}$, მაშინ ყოველი ტრიგონომეტრიული T_n პოლინომისათვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$\Omega_k(T_n,\delta)_{p(.)} \le c\delta^{2k}\left\|T_n{}^{(2k)}\right\|_{p(.)},$$

სადაც დადებითი c მუდმივი არ არის დამოკიდებული T_n პოლინომზე და δ –ზე.

დამტკიცება. ამ ლემის დამტკიცებისას გამოვიყენებთ, მაგალითად, [20] ნაშრომში მომარჯვებულ მეთოდს. ვთქვათ,

$$g_n(x) \coloneqq \prod_{i=2}^{k}(I-\sigma_{h_i})T_n(x)$$

განსაზღვრის თანახმად, გვაქვს

$$(I-\sigma_{h_1})g_n(x) = \prod_{i=1}^{k}(I-\sigma_{h_i})T_n(x)$$

ამავე დროს

$$\prod_{i=1}^{k}(I-\sigma_{h_i})T_n(x) = \frac{1}{2h_1}\int_{-h_1}^{h_1}\big(g_n(x)-g_n(x+t)\big)dt = \frac{c}{h_1}\int_0^{h_1}\int_0^{t}\int_{-u}^{u} g_n{}''(x+s)dsdudt$$

ამიტომ

$$\left\|\prod_{i=1}^{k}(I-\sigma_{h_i})T_n\right\|_{p(;)} \leq \frac{c}{h_1}\left\|\int_0^{h_1}\int_0^{t} 2u\left|\frac{1}{2u}\int_{-u}^{u} g_n''(x+s)dsdudt\right|dx\right\|_{p(.)}$$

$$\leq \frac{c}{h_1}\int_0^{h_1}\int_0^{t} 2u\left\|\frac{1}{2u}\int_{-u}^{u} g_n''(x+s)ds\right\|_{p(.)} dudt \qquad (2.7.9)$$

თუ გამოვიყენებთ შარაპუდინოვის შედეგს (იხ. თეორემა 2.6.1) სტეკლოვის საშუალოების ნორმების თანაბრად შემოსაზღვრულობის შესახებ $L^{p(.)}$ სივრცეში, როცა $p \in \mathbb{P}_0 \cap \mathbb{P}^{log}$, (2.7.9)-დან მივიღებთ,რომ

$$\left\|\prod_{i=1}^{k}(I-\sigma_{h_i})T_n\right\|_{p(;)} \leq \frac{c}{h_1}\int_0^{h_1}\int_0^{t} 2u\|g_n''\|_{p(.)}\,dudt = ch_1^2\|g_n''\|_{p(.)}$$

თუ გავიხსენებთ g_n −ის განსაზღვრას, უკანასკნელი უტოლობიდან გვექნება

$$\Omega_k(T_n,\delta) \leq c \sup_{\substack{0<h_i\leq\delta \\ i=1,..,k}} h_1^2\|g_n''\|_{p(.)} \leq c\delta^2 \sup_{0<h_i\leq\delta}\left\|\prod_{i=1}^{k}(I-\sigma_{h_i})T_n''\right\|_{p(;)} \leq c\delta^2\Omega_{k-1}(T_n'',\delta)_{p(.)}$$

$$\leq c\delta^{2k}\left\|T_n{}^{(2k)}\right\|_{p(.)}$$

თეორემა 2.7.2-ის დამტკიცება. ვთქვათ,$\{T_n(k)\}_{n=1}^{\infty}$ არის $f \in L^{p(.)}$ ფუნქციის საუკეთესო მიახლოების პოლინომთა მიმდევრობა. გვაქვს

$$\Omega_k\left(f^{(r)},\delta\right)_{p(.)} \leq \Omega_k\left(f^{(r)}-T_n^{(r)},\delta\right)_{p(.)} + \Omega_k\left(T_n^{(r)},\delta\right)_{p(.)}$$

ვთქვათ,$\delta = \frac{1}{n}$ და $2^m < n \leq 2^{m+1}$ მაშინ

$$\Omega_k\left(f^{(r)},\frac{1}{n}\right) \leq \Omega_k\left(f^{(r)}-T_{2^{m+1}}^{(r)},\frac{1}{n}\right) + \Omega_k\left(T_{2^{m+1}}^{(r)},\delta\right)_{p(.)} \qquad (2.7.10)$$

პირველი შესაკრებისთვის გვაქვს

$$\Omega_k\left(f^{(r)}-T_{2^{m+1}}^{(r)},\frac{1}{n}\right)_{p(.)} \leq c\left\|f^{(r)}-T_{2^{m+1}}^{(r)}\right\|_{p(.)}$$

თეორემა 2.7.1-ის ძალით

$$\left\|f^{(r)}-T_{2^{m+1}}^{(r)}\right\|_{p(.)} \leq c\left(n^{r-1}E_n(f)_{p(.)} + \sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{r-1}E_\nu(f)_{p(.)}\right) \qquad (2.7.11)$$

ახლა შევუდგეთ (2.7.10)-ის მარჯვენა მხარის შეფასებას.

ლემის თანახმად, გვაქვს

$$\Omega_k\left(T^{(r)}_{2^{m+1}},\delta\right)_{p(.)} \le c\delta^{2k}\left\|T_{2^{m+1}}{}^{(2k+r)}\right\|_{p(.)}$$
$$\le c\delta^{2k}\left\{\left\|T_1{}^{(2k+r)}-T_0{}^{(2k+r)}\right\|+\sum_{i=1}^{m}\left\|T_{2^{i+1}}{}^{(2k+r)}-T_{2^i}{}^{(2k+r)}\right\|_{p(.)}\right\}$$

თუ გამოვიყენებთ ბერნშტეინ-ზიგმუნდის უტოლობის ტიპის უტოლობას, მივიღებთ

$$\Omega_k\left(T^{(r)}_{2^{m+1}},\delta\right)_{p(.)} \le c\delta^{2k}\left\{E_0(f)_{p(.)}+\sum_{i=1}^{n}2^{(i+1)(2k+r)}\left\|T_{2^{i+1}}-T_{2^i}\right\|_{p(.)}\right\}$$
$$\le c\delta^{2k}\left\{E_0(f)_{p(.)}+\sum_{\mu=1}^{2^m}\mu^{2k+r-1}E_\mu(f)_{p(.)}\right\}\le\frac{c}{n^{2k}}\left(\sum_{\mu=1}^{2^m}\mu^{(2k+r)-1}E_\mu(f)_{p(.)}\right)$$

ამ უკანასკნელი უტოლობისა და (2.7.11)-ის გათვალისწინებით დავასკვნით (2.7.8)-ის მართებულობას.

§2.8 ჯექსონის მეორე უტოლობა $L^{p(.)}$ სივრცეში, როცა $p\in\mathbb{P}^{log}\cap\mathbb{P}_0$

თეორემა 2.8.1. ვთქვათ, $p\in\mathbb{P}^{log}\cap\mathbb{P}_0$. ყოველი $f\in W^{(1)}_{p(.)}$ ფუნქციისათვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$E_n(f)_{p(.)}\le\frac{c}{n}E_n(f')_{p(.)} \qquad (2.8.1)$$

ხოლო თუ შეუღლებული ფუნქციის წარმოებული $\tilde{f}'\in L^{p(.)}$, მაშინ

$$E_n(f)_{p(.)}\le\frac{c}{n}E_n\left(\tilde{f}'\right)_{p(.)}$$

სადაც c არ არის დამოკიდებული f –ზე და n –ზე.

დამტკიცება. ჯერ შევნიშნოთ, რომ თუ f –ის საშუალო მნიშვნელობა ნულის ტოლია და თუ $\bar{t}_n$ არის ნებისმიერი ტრიგონომეტრიული პოლინომი მუდმივი α_0 შესაკრებით, მაშინ

$$|\alpha_0|\le\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x)-\bar{t}_n(t)|dt\le c\|f-\bar{t}_n\|_{p(.)}$$

ამიტომ თუ f –ის საშუალო მნიშვნელობა ნულია და $t_n=\bar{t}_n-\alpha_0$,მაშინ

$$\|f-t_n\|_{p(.)}\le c\|f-\bar{t}_n\|_{p(.)}$$

ვთქვათ, $\overline{T_n}$ არის f' ფუნქციის საუკეთესო მიახლოების პოლინომი. აღვნიშნოთ $T_n = \overline{T_n} - a_0$, სადაც a_0 არის $\overline{T_n}$ პოლინომის მუდმივი შესაკრები. t_n აღნიშნავდეს T_n −ის განუსაზღვრელ ინტეგრალს პერიოდზე.

გარდა ამისა, შევნიშნოთ, რომ თუ $f \in W_{p(.)}^{(1)}$, მაშინ ადგილი აქვს უტოლობას

$$\Omega\left(f, \frac{1}{n}\right)_{p(.)} \leq \frac{c}{n} \|f'\|_{p(.)} \qquad (2.8.2)$$

მართლაც, დებულება 1.5.6-ის გამოყენებით, გვაქვს

$$\Omega\left(f, \frac{1}{n}\right)_{p(.)} = \sup_{0<h\leq\frac{1}{n}} \|f(\cdot) - m_h f(\cdot)\| = \sup_{0<h\leq\frac{1}{n}} \left\| \frac{1}{h} \int_0^h [f(\cdot) - f(\cdot + t)] dt \right\|_{p(.)}$$

$$\leq c \sup_{0<h\leq\frac{1}{n}} \frac{1}{h} \int_0^h t \left\| \frac{1}{t} \int_x^{x+t} f'(u) du \right\|_{p(.)} dt \leq c \sup_{0<h\leq\frac{1}{n}} \frac{1}{h} \int_0^h t \|f'\|_{p(.)} dt \leq \frac{c}{n} \|f'\|_{p(.)} .$$

ზემოთ მოყვანილ მოსაზრებებზე და ჯექსონის ტიპის უტოლობაზე დაყრდნობით **(იხ. დებულება 1.5.7)** მივიღებთ, რომ

$$E_n(f)_{p(.)} = E_n(f - t_n)_{p(.)} \leq c\Omega\left(f - t_n, \frac{1}{n}\right) \leq \frac{c}{n} \|f' - t_n'\|_{p(.)} \leq \frac{c}{n} \left\|f' - \tilde{T}_n\right\|_{p(.)} = \frac{c}{n} E_n(f')_{p(.)}$$

თეორემის მეორე ნაწილი მტკიცდება სტეჩკინის [47] ნაშრომში დამტკიცებული თეორემა C-ს ანალოგიურად (იხ. აგრეთვე [36], გვ.119-120).

დამტკიცებული თეორემიდან გამომდინარეობს ჯექსონის მეორე უტოლობის ანალოგი $L^{p(.)}$ სივრცეებისათვის, როცა $p \in \mathbb{P}^{log} \cap \mathbb{P}_0$.

თეორემა 2.8.2. ვთქვათ, $p \in \mathbb{P}^{log} \cap \mathbb{P}_0$. მაშინ ნებისმიერი $f \in W_{p(.)}^{(r)}$ ფუნქციისათვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$E_n(f)_{p(.)} \leq \frac{c}{n^r} \Omega\left(f^{(r)}, \frac{1}{n}\right)_{p(.)} \qquad (2.8.3)$$

დამტკიცება. (2.8.1)-ის იტერაციით მივიღებთ, რომ

$$E_n(f) \leq \frac{c}{n^r} E_n\left(f^{(r)}\right)$$

შემდეგ საკმარისია გამოვიყენოთ ჯექსონის პირველი უტოლობა (იხ. დებულება 1.5.7)

უნდა აღინიშნოს, რომ [42] ნაშრომში ი.შარაპუდინოვს ჯექსონის მეორე უტოლობა დამტკიცებული აქვს სხვა გზით, ვალე-პუსენის საშუალოებით გადახრის შეფასების გამოყენებით.

თეორემა 2.8.3. ვთქვათ, $p \in \mathbb{P}^{log} \cap \mathbb{P}_0$. ყოველი $f \in L^{p(.)}$ და ისეთი ტრიგონომეტრიული T_n პოლინომისთვის, რომლისთვისაც

$$\|f - T_n\|_{p(.)} \le c\Omega\left(f, \frac{1}{n}\right)_{p(.)} \qquad (2.8.4)$$

ადგილი აქვს უტოლობას

$$\|T_n''\|_{p(.)} \le c_1 n^2 \Omega\left(f, \frac{1}{n}\right)_{p(.)} \qquad (2.8.5)$$

სადაც c_1 მუდმივი მხოლოდ c –ზეა დამოკიდებული.

დამტკიცება. გვაქვს

$$\Omega\left(T_n, \frac{1}{n}\right) \le \Omega\left(f - T_n, \frac{1}{n}\right) + \Omega\left(f, \frac{1}{n}\right) \le c\left(\|f - T_n\| + \Omega\left(f, \frac{1}{n}\right)\right) \le c\Omega\left(f, \frac{1}{n}\right) \quad (2.8.6)$$

მეორეს მხრივ, თუ $0 < h \le \frac{1}{n}$ მაშინ

$$\Omega\left(T_n, \frac{1}{n}\right) \ge \left\|\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} T_n(t)dt - T_n(x)\right\|$$

თუ გამოვიყენებთ T_n პოლინომის ტეილორის გაშლას x წერტილის მახლობლობაში და ბერნშტეინ-ზიგმუნდის უტოლობის ტიპის უტოლობას $L^{p(.)}$ სივრცეებისათვის, $p \in \mathbb{P}^{log} \cap \mathbb{P}_0$ (იხ.დებულება 1.5.8), (2.8.6)-დან გვექნება

$$\begin{aligned}\Omega\left(T_n, \frac{1}{n}\right) &\ge \frac{c}{2h}\left\|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{h^{2k+1}}{(2k+1)!}T_n^{(2k)}(x)\right\| \ge \frac{c}{2h}\left(\|T_n''\|h^3 - \sum_{k=2}^{\infty}\frac{h^{2k+1}}{(2k+1)!}\left\|T_n^{(2k)}\right\|\right)\\ &\ge c\left(\|T_n''\|h^2 - h^2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{h^{2k-2}}{(2k+1)!}\left\|T_n^{(2k)}\right\|\right)\\ &\ge ch^2\left(\|T_n''\| - \sum_{k=2}^{\infty}\frac{h^{2k-2}}{(2k+1)!}n^{2k-2}\|T_n''\|\right) \ge ch^2\|T_n''\|\left(1 - \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)!}\right)\\ &\ge cn^{-2}\|T_n''\|_p\end{aligned}$$

ეს უკანასკნელი შეფასება (2.8.6)-თან ერთად, გვაძლევს სასურველ შედეგს.

§2.9 შეუღლებული ფუნქციების ტრიგონომეტრიული პოლინომებით აპროქსიმაციის შესახებ $L^{p(.)}$ სივრცეში, როცა $p_- = 1$

ამ პარაგრაფში დადგენილი იქნება იმის პირობა, რომ $f \in L^{p(.)}$ კლასის ფუნქციებისათვის, როცა $p \in \mathbb{P}_0 \cap \mathbb{P}^{log}$, შეუღლებული ფუნქცია $\tilde{f}$ ეკუთვნოდეს იმავე კლასს. ამასთანავე, შეუღლებული ფუნქციის საუკეთესო მიახლოებებისთვის მიღებული იქნება შეფასება გამოსავალი ფუნქციის ტრიგონომეტრიული პოლინომებით საუკეთესო მიახლოებებით.

თეორემა 2.9.1. ვთქვათ $p \in \mathbb{P}_0 \cap \mathbb{P}^{log}$ და r მთელი არაუარყოფითი რიცხვია. თუ $f \in L^{p(.)}(\mathbb{T})$ ფუნქციისთვის

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1} E_n(f)_{p(.)} < \infty \qquad (2.9.1)$$

მაშინ შეუღლებული ფუნქციის r -ური რიგის წარმოებული $\tilde{f}^{(r)} \in L^{p(.)}$ და ადგილი აქვს შეფასებას

$$E_n\left(\tilde{f}^{(r)}\right)_{p(.)} \le c\left\{(n+1)^r E_n(f)_{p(.)} + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{r-1} E_\nu(f)_{p(.)}\right\} \qquad (2.9.2)$$

სადაც c არ არის დამოკიდებული f –ზე და n –ზე.

დამტკიცება. ვინაიდან $f \in L(\mathbb{T})$ (2.9.1) პირობის ძალით,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1} E_n(f)_1 < \infty$$

ამიტომ მუდმივმაჩვენებლიანი ლებეგის სივრცეებისთვის ს.სტეჩკინის [47] თეორემის გამოყენებით მივიღებთ, რომ $\tilde{f}^{(r)} \in L^1$. აღვნიშნოთ $\varphi(x)$ –ით $\tilde{f}$ ფუნქციის პირველადი. გამოვიყენოთ თეორემა 2.8.1, რომლის ძალითაც

$$E_n(\varphi)_{p(.)} \le \frac{c}{n+1} E_n(\tilde{\varphi}')_{p(.)} \le \frac{c}{n+1} E_n(f)_{p(.)} \qquad (n = 0,1,2,\dots) \qquad (2.9.3)$$

თეორემის პირობებზე და უკანასკნელ უტოლობაზე დაყრდნობით მივიღებთ

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^r E_n(\varphi)_{p(.)} \le c \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^r}{n+1} E_n(f)_{p(.)} \le c \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1} E_n(f)_{p(.)} < \infty$$

ამგვარად, $\varphi(x)$ ფუნქციისათვის შეგვიძლია გამოვიყენოთ თეორემა 2.7.1, თუ r –ის მაგივრად ავიღებთ $r+1$ –ს, ხსენებული თეორემის ძალით,

$\tilde{f}^{(r)} = \varphi^{(r+1)}(x)$ ეკუთვნის $L^{p(.)}$ კლასს და ადგილი აქვს უტოლობას

$$E_n(\tilde{f}^{(r)}) \leq c\left((n+1)^{r+1}E_n(\varphi)_{p(.)} + \sum_{k=n+1}^{\infty} k^r E_n(\varphi)_{p(.)}\right) \qquad (2.9.4)$$

თუ კვლავ გამოვიყენებთ (2.9.3) შეფასებას (2.9.4)-დან გამოვიყვანთ, რომ

$$E_n(\tilde{f}^{(r)}) \leq c\left((n+1)^r E_n(f)_{p(.)} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{k^r}{k+1} E_k(f)_{p(.)}\right) \leq$$
$$\leq c\left((n+1)^{r+1}E_n(f)_{p(.)} + \sum_{k=n+1}^{\infty} k^{r-1}E_k(f)\right)$$

შედეგი 2.9.1. ვთქვათ, $p \in \mathbb{P}_0 \cap \mathbb{P}^{log}$ და

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} E_n(f)_{p(.)} < +\infty$$

მაშინ შეუღლებული ფუნქცია $\tilde{f} \in L^{p(.)}$ და

$$E_n(\tilde{f})_{p(.)} \leq c\left\{E_n(f)_{p(.)} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k} E_k(f)_{p(.)}\right\} \qquad (2.9.5)$$

შებრუნებული უტოლობისა და თეორემა 2.9.1-ის ძალით მივიღებთ, რომ მართებულია

თეორემა 2.9.2 ვთქვათ, $p \in \mathbb{P}_0 \cap \mathbb{P}^{log}$ და

$$\int_0^{\pi} \frac{\Omega(f,t)}{t} dt < \infty$$

მაშინ $\tilde{f} \in L^{p(.)}$ და ადგილი აქვს შეფასებას

$$\Omega(\tilde{f},\delta)_{p(.)} \leq c\left(\frac{1}{n^2}\sum_{\nu=1}^{n} \nu E_\nu(f)_{p(.)} + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{E_\nu(f)_{p(.)}}{\nu}\right)$$

დამტკიცება. შედეგი 2.9.1-ისა და დებულება 1.5.7-ის გამოყენებით თეორემის პირობიდან დავასკვნით, რომ $\tilde{f} \in L^{p(.)}$.
გამოვიყენოთ $\tilde{f}$-სთვის შებრუნებული უტოლობა და შემდეგ 2.9.5 უტოლობა. მაშინ ერთ-ერთ შესაკრებში შეჯამებადობის რიგის შეცვლის შედეგად მივიღებთ

$$\begin{aligned}\Omega\left(\tilde{f},\frac{1}{n}\right) &\le \frac{c}{n^2}\sum_{\nu=1}^{n}\nu E_\nu(f)+\frac{c}{n^2}\sum_{\nu=1}^{n}\nu\sum_{k=\nu+1}^{\infty}\frac{1}{k}E_k(f)\\ &=\frac{c}{n^2}\sum_{\nu=1}^{n}\nu E_\nu(f)+\frac{c}{n^2}\sum_{\nu=1}^{n}\nu\sum_{k=\nu+1}^{n}\frac{1}{k}E_k(f)+\frac{c}{n^2}\sum_{\nu=1}^{n}\nu\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k}E_k(f)\\ &=\frac{c}{n^2}\sum_{\nu=1}^{n}\nu E_\nu(f)+c\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k}E_k(f)+\frac{c}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}E_k(f)\sum_{\nu=1}^{k}\nu\\ &=\frac{c}{n^2}\sum_{k=1}^{n}kE_k(f)+c\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k}E_k(f).\end{aligned}$$

თეორემა 2.9.2-ზე დაყრდნობით მივიღებთ ზიგმუნდის ტიპის უტოლობას.

თეორემა 2.9.3. ვთქვათ, $p\in\mathbb{P}^{log}\cap\mathbb{P}_0$ და შესრულებულია პირობა

$$\int_{o}^{\pi}\frac{\Omega(f,t)}{t}dt<\infty$$

მაშინ $\tilde{f}\in L^{p(.)}$ და ადგილი აქვს უტოლობას

$$\Omega(\tilde{f},\delta)\le c\left(\int_{o}^{\delta}\frac{\Omega(f,t)}{t}dt+\delta^2\int_{\delta}^{\pi}\frac{\Omega(f,t)}{t^3}dt\right),0<\delta<\pi \qquad (2.9.6)$$

სადაც c მუდმივი არ არის დამოკიდებული f-ზე და δ-ზე.

დამტკიცება. საკმარისია გამოვიყენოთ შებრუნებული უტოლობა შეუღლებული ფუნქციებისათვის, უტოლობა (2.9.5) შევცვალოთ შეჯამებადობის რიგი და, ბოლოს, გამოვიყენოთ პირდაპირი თეორემა თვით ფუნქციისათვის.

შევნიშნოთ, რომ (2.9.6) უტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ თუ რომელიმე $k\in\mathbb{N}$-სათვის

$$\int_{o}^{\delta}\frac{\Omega(f,t)}{t}\left(\ln\frac{2\pi}{t}\right)^k dt<+\infty, \qquad (2.9.7)$$

მაშინ

$$\int_{o}^{\delta}\frac{\Omega(\tilde{f},t)}{t}\left(\ln\frac{2\pi}{t}\right)^{k-1} dt<+\infty$$

ეს საშუალებას გვაძლევს იმ შემთხვევაში, როცა $p_-=1$ დავადგინოთ ინვარიანტული კლასი შეუღლების ოპერაციის მიმართ.

განსაზღვრა 2.9.1. იმ f ფუნქციების სიმრავლე, რომელიც აკმაყოფილებს (2.9.7) უტოლობას აღვნიშნოთ V_k-თი.

ზემოთქმულიდან გამომდინარეობს , რომ თუ $f \in V_k$, მაშინ $\tilde{f} \in V_{k-1}$.

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$V = \bigcap_{k=0}^{\infty} V_k$$

მაშინ ცხადია შემდეგი დებულების მართებულობა

თეორემა 2.9.4. ვთქვათ, $p \in \mathbb{P}^{log} \cap \mathbb{P}_0$. მაშინ V კლასი ინვარიანტულია შეუღლების ოპერაციის მიმართ, ე.ი. თუ $f \in V$, მაშინ $\tilde{f} \in V$.

ზემოთ დამტკიცებულიდან გამომდინარეობს

შედეგი 2.9.4. თუ $\alpha > -1$ და $p \in \mathbb{P}_0 \cap \mathbb{P}^{log}$, მაშინ მწკრივები

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} E_n(f)_{p(.)} \quad \text{და} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} E_n(\tilde{f})_{p(.)}$$

კრებადია ან განშლადია ერთდროულად.

§2.10 ფუნქციათა საუკეთესო მიახლოებები და ფურიეს ტრიგონომეტრიულ მწკრივთა წრფივი მეთოდებით შეჯამებადობა ცვლადმაჩვენებლიან ლებეგის სივრცეებში

ამ პარაგრაფში ცვლადმაჩვენებლიან ლებეგის სივრცეებში საუკეთესო მიახლოების ტერმინებში დადგენილია პერიოდული ფუნქციებისათვის იმ წრფივი ოპერატორებიდან გადახრის რიგის შეფასებები, რომლებიც კონსტრუირებულია ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივის ბაზაზე.აღნიშნული გადახრის რიგი შეფასებულია საუკეთესო მიახლოებების ნულისაკენ მისწრაფების რიგით.ამავე დროს გამოკვლეულია სივრცის მეტრიკის გავლენა ზემოხსენებული გადახრის ცვლილების ხასიათზე. მიღებული შედეგების სიახლე იმაში მდგომარეობს,რომ დადგენილი უტოლობების სხვადასხვა მხარეს სივრცეთა ცვლადი მაჩვენებლები სხვადასხვაა. როგორც კერძო შემთხვევა გაცემულია პასუხი შემდეგ კითხვაზე: საუკეთესო მიახლოებების ტერმინებში რა პირობებს უნდა აკმაყოფილებდეს $f \in L^{p(.)}$ ფუნქცია, რომ ამ ფუნქციის წრფივი მეთოდებით შეჯამებადობის საშუალოები $L^{q(.)}\big(p(x) \le q(x)\big)$ ნორმით კრებადი იყოს გამოსავალი ფუნქციისკენ? ვთქვათ, $f \in L^{p(.)}(\mathbb{T}), p \in \mathbb{P} \cap \mathbb{P}^{log}$.განვიხილოთ ფუნქციათა მიმდევრობა $\{\lambda_k(r)\}$ განსაზღვრული ნამდვილი ღერძის რაიმე G ქვესიმრავლეზე, რომლისთვისაც

$$\lambda_0(r) = 1, \lim_{r \to r_0} \lambda_\nu(r) = 1$$

ყოველი ფიქსირებული $\nu = 1,2, \ldots$

ვიგულისხმოთ,რომ ყოველი $r \in G -$ სთვის მწკრივი

$$U_r(f, x, \lambda) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu(r) \left(a_\nu cos\nu x + b_\nu sin\nu x\right)$$

თითქმის ყველგან კრებადია.

a_ν და b_ν წარმოადგენენ f ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტებს. ყოველი წრფივი $U_r(f, x, \lambda)$ ოპერატორისათვის განვიხილოთ სიდიდე

$$\mathcal{R}_r(f, \lambda)_{p(.)} = \|f(\cdot) - U_r(f, \cdot, \lambda)\|_{q(.)}$$

რომელიც ახასიათებს $U_r(f, x, \lambda)$ ოპერატორის გადახრას $f(x)$ ფუნქციიდან შესაბამისი მეტრიკით. აქ ნაგულისხმევია,რომ $p(x) \le q(x). p, q \in \mathbb{P} \cap \mathbb{P}^{log}$.

თავდაპირველად განვიხილოთ აბელ-პუასონის საშუალოებიდან გადახრის ნორმით შეფასების საკითხი.

ვთქვათ $0 \le r \le 1$,

$$\lambda_k(\nu) = r^\nu \quad (\nu = 1,2, ..)$$

მაშინ

$$\mathcal{R}_r(f, \lambda)_{p(.)} = \left\| f(x) - \sum_{\nu=0}^{\infty} r^\nu A_\nu(x) \right\|_{q(.)} = \left\| \sum_{\nu=0}^{\infty} (1 - r^\nu) A_\nu(x) \right\|_{q(.)} \qquad (2.10.1)$$

სადაც $\sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu(x)$ წარმოადგენს $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივს.

თეორემა 2.10.1 ვთქვათ p და $q - 2\pi$ პერიოდული, მთელ ღერძზე უწყვეტი ფუნქციებია ისეთი, რომ $\frac{1}{q(x)} = \frac{1}{p(x)} - s, x \in \mathbb{T}$ სადაც s რაიმე დადებითი ნამდვილი რიცხვია. ვიგულისხმოთ, რომ $p, q \in \mathbb{P} \cap \mathbb{P}^{log}$ და $p^+ < \frac{1}{s}$. თუ $f \in L^{p(.)}$ ფუნქციისთვის

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \nu^{\gamma s - 1} E_\nu^\gamma(f)_{p(.)} < +\infty, \gamma = min(2, q_-)$$

მაშინ

$$\left\|f(x)-\sum_{\nu=0}^{\infty} r^{\nu} A_{\nu}(x)\right\|_{q(.)}$$
$$\leq c\left[(1-r)\left(\sum_{\nu=0}^{\left[\frac{1}{1-r}\right]}(\nu+1)^{\gamma(s+1)-1} E_{\nu}^{\gamma}(f)_{p(.)}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right.$$
$$\left.+\left(\sum_{\nu=\left[\frac{1}{1-r}\right]+1}^{\infty} \nu^{\gamma s-1} E_{\nu}^{\gamma}(f)_{p(.)}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right] \qquad (2.10.2)$$

დამტკიცება. ვთქვათ, $2^{m} \leq n=\left[\frac{1}{1-r}\right]<2^{m+1}$. (2.10.1) ტოლობიდან გვაქვს

$$\mathcal{R}_{r}(f, \lambda)_{q(.)} \leq\left\|\sum_{\nu=0}^{2^{m+1}-1}\left(1-r^{\nu}\right) A_{\nu}(x)\right\|_{q(.)}+\left\|\sum_{\nu=2^{m+1}}^{\infty}\left(1-r^{\nu}\right) A_{\nu}(x)\right\|_{q(.)}=I_{1}+I_{2}$$

რადგანაც რიცხვთა მიმდევრობა $\{1-r^{\nu}\}$ ყოველი r −ისათვის $0<r<1$, აკმაყოფილებს მარცინკევიჩის მულტიპლიკატორების პირობას, ამიტომ

$$I_{2} \leq c\left\|\sum_{\nu=2^{m+1}}^{\infty} A_{\nu}(x)\right\|_{q(.)} \leq c E_{n}(f)_{q(.)} \qquad (2.10.3)$$

ლიტლვუდ-პელის თეორემის თანახმად ცვლადმაჩვენებლიანი ლებეგის სივრცეებისათვის გვაქვს

$$I_{1} \leq\left\|\left(\sum_{\nu=0}^{m}\left|\sum_{\mu=2^{\nu}}^{2^{\nu+1}-1}\left(1-r^{\mu}\right) A_{\mu}(x)\right|^{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{q(.)} \qquad (2.10.4)$$

თუ გამოვიყენებთ ნიკოლსკის უტოლობის ტიპის უტოლობას (იხ. თეორემა 2.4.1), მივიღებთ

$$\left\|\sum_{\mu=2^{\nu}}^{2^{\nu+1}-1}\left(1-r^{\mu}\right) A_{\mu}(x)\right\|_{q(.)} \leq c 2^{\nu s}\left\|\sum_{\mu=2^{\nu}}^{2^{\nu+1}-1}\left(1-r^{\mu}\right) A_{\mu}(x)\right\|_{p(.)} \qquad (2.10.5)$$

მეორეს მხრივ, აბელის გარდაქმნის გამოყენებით გვაქვს

$$\left\|\sum_{\mu=2^{\nu}}^{2^{\nu+1}-1}(1-r^{\mu})\,A_{\mu}(x)\right\|_{p(.)}$$

$$=\left\|\sum_{\mu=2^{\nu}}^{2^{\nu+1}-1}\left(S_{\mu}(f;x)-S_{2^{\mu-1}}(f;x)\right)(r^{\mu+1}-r^{\mu})+(S_{2^{\nu+1}-1}(f;x)\right.$$

$$\left.-S_{2^{\nu-1}}(f;x))\left(1-r^{2^{\nu+1}}\right)\right\|_{q(.)}\le 2^{\nu}(1-r)E_{2^{\nu-1}}(f)_{p(.)}\qquad(2.10.6)$$

ახლა $\{E_n(f)_{p(.)}\}_{n=1}^{\infty}$ მიმდევრობის მონოტონურობის გამო ნებისმიერი $1<\gamma<\infty$ რიცხვისთვის გვექნება შეფასება

$$\left\|\sum_{\mu=2^{\nu}}^{2^{\nu+1}-1}(1-r^{\mu})\,A_{\mu}(x)\right\|_{q(.)}\le c2^{\nu s\gamma}(1-r)^{\gamma}2^{\nu\gamma}E_{2^{\nu-1}}^{\gamma}(f)_{p(.)}$$

$$\le(1-r)^{\gamma}\sum_{\mu=2^{\nu-1}}^{2^{\nu}-1}\mu^{\gamma(1+s)-1}E_{\mu}(f)_{p(.)}\qquad(2.10.7)$$

თუ გამოვიყენებთ **თეორემა 2.6.2**-ის დამტკიცების დროს გამოყენებულ არგუმენტებს, მაშინ (2.10.4) და (2.10.7)-დან მივიღებთ,რომ

$$I_1\le c(1-r)\left\{\sum_{\nu=0}^{\left[\frac{1}{1-r}\right]}(\nu+1)^{\gamma(s+1)-1}E_{\nu}^{\gamma}(f)_{p(.)}\right\}^{\frac{1}{\gamma}}\qquad(2.10.8)$$

თუ მივიღებთ მხედველობაში **თეორემა 2.5.1-ს**, მაშინ (2.10.3) და (2.10.8) შეფასებების ძალით გვექნება

$$\mathcal{R}_r(f,\lambda)_{q(.)}\le c\left\{n^{\frac{1}{p(\cdot)}-\frac{q}{q(\cdot)}}E_n(f)_{p(.)}+(1-r)\left\{\sum_{\nu=0}^{\left[\frac{1}{1-r}\right]}(\nu+1)^{\gamma(s+1)-1}E_{\nu}^{\gamma}(f)_{p(.)}\right\}^{\frac{1}{\gamma}}\right.$$

$$\left.+(1-r)\left\{\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{\gamma s-1}E_{\nu}^{\gamma}(f)_{p(.)}\right\}^{\frac{1}{\gamma}}\right\},\qquad\gamma=\min(2,q_{-})$$

ეს უკანასკნელი იგივეა რაც (2.10.2) უტოლობა, რადგან

$$n^{\frac{1}{p(\cdot)}-\frac{q}{q(\cdot)}}E_n(f)_{p(.)} = n^s E_n(f)_{p(.)} \le c(1-r)\left\{\sum_{\nu=0}^{\left[\frac{1}{1-r}\right]}(\nu+1)^{\gamma(s+1)-1}E_\nu^\gamma(f)_{p(.)}\right\}^{\frac{1}{\gamma}}$$

თეორემა 2.10.2. ვთქვათ, $p(x), q(x)$და s აკმაყოფილებს თეორემა 2.10.1-ის პირობებს. ამჯერად $\{\lambda_\nu(r)\}$ იყოს რიცხვთა ნებისმიერი სამკუთხა მატრიცა

$(r = 0,1,2, \dots; \lambda_0; (r) = 1; \lambda_\nu(r) = 0$ როცა $\nu > r$)

თუ $f \in L^{p(.)}$ ფუნქციისათვის შესრულებულია პირობა (2.10.1), მაშინ ადგილი აქვს უტოლობას

$$\mathcal{R}_r(f,\lambda)_{q(.)} \le c\left[\left(\sum_{\nu=0}^{m} 2^{\nu s\gamma}\, h_2^\gamma(r)E_{2^\nu-1}^\gamma(f)\right)^{\frac{1}{\gamma}} + \left(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{\gamma s-1}E_\nu^\gamma(f)_{p(.)}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right] \qquad (2.10.9)$$

სადაც $2^m \le n = \left[\frac{1}{1-r}\right] < 2^{m+1}$ და

$$h_{2^\nu} = \sum_{\mu=2^\nu}^{2^{\nu+1}-1}\left|\lambda_\mu(r) - \lambda_{\mu+1}(r)\right| + \left|1-\lambda_{2^\nu}(r)\right|$$

როგორც წინა თეორემაში, აქაც გვაქვს, რომ

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_r(f,\lambda)_{q(.)} &= \left\|f(x) - \sum_{\nu=0}^{n}\lambda_\nu(r)A_\nu(x)\right\|_{q(.)} \\ &\le \left\|\sum_{\nu=0}^{n}\left(1-\lambda_{2^\mu}(r)\right)A_\nu(x)\right\|_{q(.)} + E_n(f)_{q(.)} \quad (2.10.10)\end{aligned}$$

ცვლადმაჩვენებლიანი ლებეგის სივრცეებისთვის ლიტლვუდ-პელის ტიპის თეორემის გამოყენებით მივიღებთ

$$\left\|\sum_{\nu=0}^{n}\left(1-\lambda_{2^\mu}(r)\right)A_\nu(x)\right\|_{q(.)} \le c\left\|\sum_{\mu=0}^{m}\left(\left|\sum_{\nu=2^\mu}^{2^{\mu+1}-1}\left(1-\lambda_{2^\mu}(r)\right)A_\nu(x)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{q(.)} \qquad (2.10.11)$$

მეორეს მხრივ, აბელის გარდაქმნის გამოყენება გვაძლევს

$$\sum_{\nu=2^{\mu}}^{2^{\mu+1}-1}\left(1-\lambda_{2^{\mu}}(r)\right)A_{\nu}(x)$$
$$=\sum_{\mu=2^{\nu}}^{2^{\nu+1}-1}\{S_{\nu}(f;x)-S_{2^{\mu+1}}(f;x)\}\{\lambda_{\nu+1}(r)-\lambda_{\nu}(r)\}$$
$$+\left\{\left(1-\lambda_{2^{\mu}}(r)\right)\right\}\{S_{2^{\mu+1}-1}(f;x)-S_{2^{\mu-1}}(f;x)\}$$

ნიკოლსკის და მინკოვსკის უტოლობების ტიპის უტოლობების გამოყენებით მივიღებთ,რომ

$$\left\|\sum_{\nu=2^{\mu}}^{2^{\mu+1}-1}\left(1-\lambda_{2^{\mu}}(r)\right)A_{\nu}(x)\right\|_{q(.)}$$
$$\leq c2^{\mu s}\sum_{\nu=2^{\mu}}^{2^{\mu+1}-1}\left(\|S_{2^{\mu+1}-1}-S_{\nu}\|_{p(.)}|\lambda_{\nu+1}(r)-\lambda_{\nu}(r)|\right.$$
$$\left.+|1-\lambda_{2^{\mu}}(r)|\|S_{2^{\mu+1}-1}-S_{2^{\mu}-1}\|_{p(.)}\right)$$
$$\leq c2^{\mu s}E_{2^{\mu}-1}(f)_{p(.)}\left\{\sum_{\nu=2^{\mu}}^{2^{\mu+1}-1}|\lambda_{\nu+1}(r)-\lambda_{\nu}(r)|+|1-\lambda_{2^{\mu}}(r)|\right\}$$
$$=2^{\mu s}E_{2^{\mu}-1}(f)_{p(.)}h_{2^{\mu}}(r) \qquad (2.10.12)$$

გამოვიყენოთ იგივე არგუმენტები, რაც თეორემა 2.10.1-ის დამტკიცების დროს იყო გამოყენებული, მაშინ (2.10.11) და (2.10.12) მოგვცემს

$$\left\|\sum_{\nu=1}^{n}\left(1-\lambda_{\nu}(r)\right)A_{\nu}(x)\right\|_{q(.)}\leq\left\{\sum_{\mu=0}^{m}E_{2^{\mu}-1}^{\gamma}(f)_{p(.)}2^{\gamma s\mu}h_{2^{\mu}}^{\gamma}(r)\right\}^{\frac{1}{\gamma}}$$

(2.10.10)-ში მეორე შესაკრების შესაფასებლად გამოვიყენებთ **თეორემა 2.7.1**

შედეგი 2.10.1. ვთქვათ $n=0,1,2,\ldots$ და

$$\lambda_{\nu}(n)=\begin{cases}1-\dfrac{\nu^{k}}{(n+1)^{k}} & \text{როცა } 0\leq\nu\leq n\\ 0 & \text{როცა } \quad \nu>n\end{cases}$$

სადაც $k\geq 1$, მაშინ

$$\left\| f(x) - \sum_{\nu=0}^{n} \left(1 - \frac{\nu^k}{(n+1)^k}\right) A_\nu(x) \right\|_{q(.)}$$
$$\leq c\left(\frac{c}{(n+1)^k} \left(\sum_{\nu=0}^{n} (\nu+1)^{\gamma(s+1)k-1} E_\nu^\gamma(f)_{p(.)} \right)^{\frac{1}{\gamma}} + \left(\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{\gamma s-1} E_\nu^\gamma(f)_{p(.)} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \right)$$

შედეგი 2.10.2. თუ $f \in L^{p(.)}$ ფუნქციისთვის შესრულებულია (2.10.1) პირობა, მაშინ

$$\lim_{n\to\infty} \left\| f(x) - \sum_{\nu=0}^{n} \left(1 - \frac{\nu^k}{(n+1)^k}\right) A_\nu(x) \right\|_{q(.)} = 0$$

§2.11 ჩართვის თეორემები ცვლადმაჩვენებლიანი განზოგადებული ვეილ-ნიკოლსკის კლასებისათვის

ამ პარაგრაფში შემოღებულია ე.წ ცვლადმაჩვენებლიანი ვეილ-ნიკოლსკის ფუნქციური კლასები და ამ კლასებისათვის დამტკიცებულია ჩართვის თეორემები.

განსაზღვრა 2.11.1. ვთქვათ, 2π –პერიოდული ფუნქცია$f \in L^{p(.)}(\mathbb{T})$, $p \in \mathbb{P} \cap \mathbb{P}^{log}$ და მისი ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივი არის

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n cosnx + b_n sinnx) \tag{2.11.1}$$

დადებით რიცხვთა მოცემული λ_n მიმდევრობისათვის და $\beta \in \mathbb{R}$ რიცხვისათვის განვიხილოთ გარდაქმნილი ტრიგონომეტრიული მწკრივი

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_n [a_\nu \cos\left(\nu x + \frac{\pi\beta}{2}\right) + b_\nu sin\left(\nu x + \frac{\pi\beta}{2}\right)]$$

თუ ეს მწკრივი წარმოადგენს რაიმე $g \in L^1$ კლასის ფურიეს მწკრივს, მაშინ ვიტყვით, რომ f ფუნქციას აქვს (λ, β) –აზრით წარმოებული და აღვნიშნავთ$f^{(\lambda,\beta)} := g$.

განსაზღვრა 2.11.2.

$$W^{p(.),\lambda,\beta} := \{ f \in L^{p(.)} : \exists f^{(\lambda,\beta)} \text{ და } f^{(\lambda,\beta)} \in L^{p(.)} \} \tag{2.11.2}$$

განსაზღვრა 2.11.3. $\Phi_r(r > 0)$ –თი აღვნიშნოთ $(0, \pi)$ ინტერვალზე განსაზღვრული არაუარყოფითი ისეთ ფუნქციათა სიმრავლე, რომელთათვისაც შესრულებულია პირობები:

1. $\lim\limits_{\delta\to 0+} \varphi(\delta) = 0$

2. $\varphi(\delta)$ არაკლებადია

3. $\delta^{-r}\varphi(\delta)$ არაზრდადია.

განსაზღვრა 2.11.4. ვთქვათ, $\varphi \in \Phi_r$ მაშინ

$$H_r^{p(.)}[\varphi] \coloneqq \{f \in L^{p(.)}: \Omega_r(f,\delta) = O(\varphi(\delta)), \delta \to 0+\} \tag{2.11.3}$$

და

$$W^{p(.),\lambda,\beta}H_r[\varphi] \coloneqq \{f \in W^{p(.),\lambda,\beta}: \Omega_r(f^{(\lambda,\beta)},\delta) = O[\varphi(\delta)], \delta \to 0+\} \tag{2.11.4}$$

თეორემა 2.11.1. ვთქვათ $\gamma = \min(2, p_-)$, $r \in \mathbb{R}_+, \beta \in \mathbb{R}, \rho \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}, \omega \in \Phi_r$ და $\lambda = \{\lambda_n\}$ არის დადებით რიცხვთა არაკლებადი მიმდევრობაა.

დავუშვათ, რომ $p \in \mathbb{P} \cap \mathbb{P}^{log}$.

ა) თუ $\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_{n+1}^{\gamma} - \lambda_n^{\gamma})\,\omega^{\gamma}\left(\frac{1}{n}\right) < \infty$,

მაშინ ადგილი აქვს ჩართვას $H_{r+\rho}^{p(.)} \hookrightarrow W^{p(.),\lambda,\beta}$.

ვთქვათ, $\{\lambda_n\}$ დადებით რიცხვთა ისეთი არაკლებადი მიმდევრობაა, რომ $\{n^{-2\rho}\,\lambda_n\}$ არაზრდადია, მაშინ ადგილი აქვს შემდეგ ჩართვებს:

ბ) თუ

$$\frac{1}{\lambda_n} = O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

მაშინ

$$W^{p(.),\lambda,\beta} \subset H_{r+\rho}^{p(.)}[\omega]$$

გ) თუ

$$\frac{\varphi\left(\frac{1}{n}\right)}{\lambda_n} = O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

მაშინ

$$W^{p(.),\lambda,\beta}H_r[\varphi] \subset H_{r+\rho}^{p(.)}[\omega]$$

დატკიცება. თეორემა 2.11.1-ის დამტკიცებისას მეორე ნაწილში არსებითად გამოყენებულია პარაგრაფ 2.2-ში დამტკიცებული ჯაჭვ-უტოლობა:

$$c_1\Omega_r\left(f,\frac{1}{n}\right)_{p(.)} \leq \left(n^{-2r}\left\|S_n^{(2r)}(.,f)\right\|_{p(.)} + \|f - S_n(\cdot,f)\|_p\right) \leq c_2\Omega_r\left(f,\frac{1}{n}\right)_{p(.)}, \qquad (2.11.5)$$

სადაც $S_n(x,f)$ აღნიშნავს (2.11.1) მწკრივის კერძო ჯამებს, მუდმივები c_1 და c_2 არ არის დამოკიდებული f -ზე და n -ზე.

დავამტკიცოთ პუნქტი ა). ცხადია, რომ

$$\lambda_{2^n}^{\gamma} = \begin{cases} \lambda_1^{\gamma} + \sum_{\nu=2}^{n+1}(\lambda_{2^{\nu-1}}^{\gamma} - \lambda_{2^{\nu-2}}^{\gamma}) & \text{თუ } n \geq 1 \\ \lambda_1^{\theta} & \text{თუ } n = 0 \end{cases} \qquad (2.11.6)$$

ქვემოთ გამოყენებული იქნება აღნიშვნა

$$\Delta_1 := a_1 cosx + b_1 sinx, \Delta_{n+1} := \sum_{\nu=2^n+1}^{2^{n+1}} (a_\nu cos\nu x + b_\nu sin\nu x)$$

მინკოვსკის უტოლობის გამოყენებით ვღებულობთ უტოლობას:

$$I_1 := \left\|\left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{2^{n-1}}^2 \Delta_n^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{p(.)} \leq c\left\|\left(\lambda_1^2\Delta_1^2 + \lambda_2^2\Delta_2^2 + \sum_{n=3}^{\infty}\lambda_{2^{n-2}}^2\Delta_n^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{p(.)}$$

$$\leq c\left\|\lambda_1^2\Delta_1^2 + \lambda_2^2\Delta_2^2 + \sum_{n=3}^{\infty}\Delta_n^2[\lambda_1^{\gamma} + \sum_{\mu=3}^{n}(\lambda_{2^{\mu-2}}^{\gamma} - \lambda_{2^{\mu-3}}^{\gamma})]^{\frac{2}{\gamma}}\right\|_{p(.)}$$

$$\leq c(\lambda_1^{\gamma}\left\|\left(\sum_{n=1}^{\infty}\Delta_n^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{p(.)}^{\gamma} + \sum_{\mu=3}^{\infty}(\lambda_{2^{\mu-1}}^{\gamma} - \lambda_{2^{\mu-2}}^{\gamma})\left\|\left(\sum_{n=\mu}^{\infty}\Delta_n^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{p(.)}^{\gamma})^{\frac{1}{\gamma}} \qquad (2.11.7)$$

ცვლადმაჩვენებლიანი ლებეგის სივრცეებისათვის ლიტლვუდ-პელის თეორემის გამოყენებით (2.11.7)-დან ვღებულობთ

$$I_1 \leq c(\lambda_1^{\gamma}\|f\|_{p(.)}^{\gamma} + \sum_{\mu=1}^{\infty}(\lambda_{2^{\mu}}^{\gamma} - \lambda_{2^{\mu-1}}^{\gamma})\|f - S_{2^{\mu-1}}(\cdot,f)\|^{\gamma})$$

თუ გავითვალისწინებთ **თავი 1-ის დებულება 1.5.1-ს**, უკანასკნელი უტოლობიდან მივიღებთ, რომ

$$I_1 \leq c\left(\lambda_1^{\gamma}\|f\|_{p(.)}^{\gamma} + \sum_{\mu=1}^{\infty}(\lambda_{2^{\mu}}^{\gamma} - \lambda_{2^{\mu-1}}^{\gamma})E_{2^{\mu-1}}^{\gamma}(f)_{p(.)}\right) \qquad (2.11.8)$$

ჯეკსონის ტიპის უტოლობის ძალით,

$$E_\nu(f)_{p(.)} \le c\Omega_{r+\rho}(f,\frac{1}{\nu})_{p(.)}$$

და პირობით $f \in H_{r+\rho}^{p(.)}$, (2.11.8) უტოლობიდან დავასკვნით, რომ $I_1 < \infty$. მაშინ ლიტლვუდ-პელის თეორემის თანახმად ცვლადმაჩვენებლიან ლებეგის სივრცეებში, ტრიგონომეტრიული მწკრივი

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{2^{n-1}}\, \Delta_n \qquad (2.11.9)$$

წარმოადგენს რაიმე $g \in L^{p(.)}$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივს და

$$\|g\|_{p(.)} \le cI_1 \qquad (2.11.10)$$

გადავწეროთ (2.11.9) მწკრივი ასეთი სახით

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} h_\nu(a_\nu cos\nu x + b_\nu sin\nu x)$$

სადაც $h_i := \lambda_i, i = 1,2$ და $h_\nu = \lambda_{2^n}$ როცა $2^{n-1} + 1 \le \nu \le 2^n$ $(n = 2,3, \dots)$ განვიხილოთ გარდაქმნილი ტრიგონომეტრიული მწკრივი

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} h_\nu \Lambda_\nu(a_\nu cos\nu x + b_\nu sin\nu x) \qquad (2.11.11)$$

სადაც $\Lambda_1 = \Lambda_2 = 1, \Lambda_\nu = \frac{\lambda_\nu}{h_n} = \frac{\lambda_\nu}{\lambda_{2^n}}$ როცა $2^{n-1} + 1 \le \nu \le 2^n$ $(n = 2,3, \dots)$

რიცხვთა მიმდევრობა $\{\Lambda_\nu\}$ აკმაყოფილებს მარცინკევიჩის მულტიპლიკატორების შესახებ თეორემის პირობებს, ამიტომ (2.11.11) მწკრივი არის $L^{p(.)}$ კლასის $f(\lambda,0)$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივი და

$$\left\|f^{(\lambda,0)}\right\|_{p(.)} \le c\|g\|_{p(.)} \qquad (2.11.12)$$

შეუღლებული ფუნქციის $L^{p(.)}$ სივრცეში შემოსაზღვრულობის და (2.11.10)უტოლობის ძალით დავასკვნით,რომ

$$\|f^{(\lambda,\beta)}\|_{p(.)} \le c\left(\lambda_1^\gamma\|f\|_{p(.)} + \sum_{\mu=1}^{\infty}(\lambda_{2^\mu}^\gamma - \lambda_{2^{\mu-1}}^\gamma)\Omega_{r+\rho}^\gamma(f,\frac{1}{n})\right)^{1/\gamma} \qquad (2.11.13)$$

ახლა დავამტკიცოთ ბ) და გ) პუნქტები.(2.11.5)-ის მარცხენა უტოლობის ძალით გვაქვს

$$\Omega_{r+\rho}(f,\frac{1}{n})_{p(.)} \leq c\left(\|f-S_n\|_{p(.)}+n^{-2(r+\rho)}\left\|S_n^{2(r+\rho)}(f)_{p(.)}\right\|_{p(.)}\right) \qquad (2.11.14)$$

გამოვიყენოთ ცვლადმაჩვენებლიანი სივრცეებისთვის მარცინკევიჩის მულტიპლიკატორების შესახებ თეორემა შემდეგნაირად: ფრჩხილებში მოთავსებული პირველი შესაკრებისთვის მარცინკევიჩის მულტიპლიკატორებად ავიღოთ $\mu_{\nu,n}=\frac{\lambda_n}{\lambda_\nu}, \nu=1.2\ldots$, ხოლო მეორე შესაკრებისთვის კი $\mu'_{\nu,n}=(n^{2\rho}\lambda_\nu)/(\nu^{2\rho}\lambda_n)$. მაშინ მივიღებთ

$$\Omega_{r+\rho}(f,\frac{1}{n})_{p(.)} \leq c(\left\|f^{(\lambda,\beta)}-S_n\left(\cdot,f^{(\lambda,\beta)}\right)\right\|_{p(.)}\lambda_n^{-1}+\lambda_n^{-1}n^{-2r}\left\|S_n^{2r}f^{(\lambda,\beta)}\right\|_{p(.)})$$

მაშინ (2.11.5)-ის მარჯვენა უტოლობის ძალით მივიღებთ

$$\Omega_{r+\rho}(f,\frac{1}{n})_{p(.)} \leq c\Omega_r(f^{(\lambda,\beta)},\frac{1}{n})_{p(.)}\lambda_n^{-1} \leq c\lambda_n^{-1}\left\|f^{(\lambda,\beta)}\right\|_{p(.)} \qquad (2.11.15)$$

ვთქვათ, $f \in W^{p(.),\lambda,\beta)}H_r[\varphi]$ და $\frac{\varphi(\frac{1}{n})}{\lambda_n}=O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ მაშინ (2.11.15) ჯაჭვ-უტოლობის პირველი უტოლობის ძალით, გვექნება

$$\Omega_{r+\rho}\left(f,\frac{1}{n}\right)= \ O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

ე.ი $f \in H_{r+\rho}^{p(.)}[\omega]$.

ახლა ვთქვათ, $f \in W^{p(.),\lambda,\beta}$ და $\frac{1}{\lambda_n}=O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ მაშინ (2.11.15) უტოლობიდან დავასკვნით,რომ

$$\Omega_{r+\rho}\left(f,\frac{1}{n}\right)= \ o\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

რაც იმას ნიშნავს,რომ $f \in H_{r+\rho}^{p(.)}[\omega]$.

თავი III

ფუნქციათა აპროქსიმაციის საკითხები წონიანი გრანდ ლებეგის სივრცეების აპროქსიმებად ქვესივრცეებში

შესავალი

ამ თავში გადმოცემულია პერიოდულ ფუნქციათა ტრიგონომეტრიული პოლინომებით აპროქსიმაციის საკითხები წონიანი გრანდ ლებეგის სივრცეების ჩარჩოებში. განიხილება წონიანი გრანდ ლებეგის სივრცის ორი შესაძლო ვარიანტი: ნორმის განსაზღვრაში წონა მონაწილეობს როგორც ზომის წარმომქმნელი ფუნქცია და მეორე-როცა წონა მამრავლის სახით არის წარმოდგენილი. რამდენადაც ეს სივრცეები არ არის სეპარაბელური, აპროქსიმაციის პრობლემები განხილულია იმ ქვესივრცეებში, რომლებიც წარმოადგენენ წონიანი ლებეგის L^p სივრცეების ჩაკეტვებს შესაბამისი სივრცეების ნორმებით. როგორც პირველ თავში იყო ნათქვამი, $L_w^{p),\theta}$-თი აღვნიშნავთ წონიან გრანდ ლებეგის სივრცეს, როცა წონა $w(x)dx$ ზომით ფიგურირებს ნორმაში, ხოლო მეორე შემთხვევაში სივრცისთვის შემოღებულია აღნიშვნა $\mathcal{L}_w^{p),\theta}$. აღნიშნული იყო აგრეთვე, რომ ეს სივრცეები ურთიერთ არადაყვანადია განსხვავებით ლებეგის წონიანი სივრცეებისგან.

თავდაპირველად შემოგვაქვს რა K_2 ფუნქციონალის ცნება $L_w^{p),\theta}$ სივრცეში, ვამტკიცებთ მის ორმხრივ შეფასებას განზოგადებული სიგლუვის მოდულით. ამის შემდეგ დადგენილია ჯექსონის პირველი და მეორე უტოლობების ანალოგები. შებრუნებული უტოლობების დადგენას ზემოხსენებულ სივრცეში ვახერხებთ § 3.2-ში ისეთი სახით, როცა უტოლობის ორივე მხარეს სივრცის მეტრიკის მაჩვენებლები ერთნაირია. დამტკიცებისას, როგორც კლასიკურ შემთხვევაში, გამოიყენება ბერნშტეინ-ზიგმუნდის თეორემა $L_w^{p),\theta}$ სივრცეში. ეს უტოლობა გამოგვყავს ადრე დამტკიცებული ზოგადი თეორემიდან, ვადგენთ რა, რომ ამ სივრცეში მუშაობს მარცინკევიჩის მულტიპლიკატორების ტიპის თეორემა, დადგენილი პირდაპირი და შებრუნებული თეორემების საფუძველზე გამოგვყავს $L_w^{p),\theta}$ სივრცის ნორმით განსაზღვრული ლიპშიცის ტიპის კლასების სრული კონსტრუქციული დახასიათება.

§ 3.4-ში დადგენილია ჰარმონიული ანალიზის ფუნდამენტური ინტეგრალური ოპერატორების შემოსაზღვრულობა $\mathcal{L}_w^{p),\theta}$ სივრცეებში. ეს ოპერატორებია: ჰარდი-ლიტლვუდის მაქსიმალური, სინგულარული, რისის პოტენციალის ტიპის ოპერატორები, აგრეთვე მარცინკევიჩის მულტიპლიკატორების ოპერატორი. ეს შედეგები გამოყვანილია ნახევრადწრფივი $\mathcal{L}_w^{p),\theta}$ ოპერატორების სივრცეში შემოსაზღვრულობის შესახებ ზოგადი თეორემებიდან, რომელთა დამტკიცება ამავე პარაგრაფშია მოყვანილი.

§ 3.5-ში დადგენილია ბერნშტეინ-ზიგმუნდისა და ნიკოლსკის უტოლობების ტიპის უტოლობები $\mathcal{L}_w^{p),\theta}$ სივრცეში, რაც საშუალებას გვაძლევს დავადგინოთ ისეთი ტიპის შებრუნებული უტოლობები, როგორც თვით ფუნქციისთვის, ასევე მისი წარმოებულებისათვის, როცა უტოლობის სხვადასხვა მხარეს სივრცის მეტრიკის მაჩვენებლები განსხვავებულია.

დამტკიცებულ უტოლობებზე დაყრდნობით § 3.6-ში დადგენილია აგრეთვე პირდაპირი უტოლობა $\mathcal{L}_w^{p),\theta}$ სივრცეებში.

§ 3.7-ში აღნიშნულია, რომ წინა პარაგრაფებში დადგენილი თეორემების ანალოგიური შედეგები მართებულია ცვლადმაჩვენებლიანი გრანდ ლებეგის სივრცის $\tilde{L}^{p(.),\theta}$ ქვესივრცეებში.

§3.1 $\boldsymbol{K}$-ფუნქციონალი და მისი ორმხრივი შეფასებები. ჯექსონის ტიპის უტოლობები

შემდგომში $\tilde{L}_w^{p),\theta}$-თი $1 < p < \infty, \theta > 0$ აღნიშნული იქნება L_w^p სივრცის ჩაკეტვა $L_w^{p),\theta}$ სივრცის ნორმით. როგორც შესავალში იყო აღნიშნული ეს ქვესივრცე არის $L_w^{p),\theta}$ სივრცის იმ ფუნქციების ქვესიმრავლე, რომელთათვისაც

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{\theta} \|f\|_{L_w^{p-\varepsilon}} = 0,$$

სადაც

$$\|f\|_{L_w^{p-\varepsilon}} = (\int_{\mathbb{T}} |f(x)|^{p-\varepsilon} w(x)dx)^{\frac{1}{p}}$$

ყოველი $f \in \tilde{L}_w^{p),\theta}$ $(1 < p < \infty, \theta > 0)$ ფუნქციისათვის და $w \in A_p$ კლასის წონისათვის განვიხილოთ ე.წ. K_2 ფუნქციონალი, რომელიც განსაზღვრულია როგორც

$$K_2\left(f, t; \tilde{L}_w^{p),\theta}, W_{p),\theta,w}^{(2)}\right) := \inf_{g\in W_{p),\theta,w}} \left\{\|f-g\|_{L_w^{p),\theta}} + t^2\|g''\|_{L_w^{p),\theta}}\right\}, t > 0$$

სადაც $W_{p),\theta,w}^{(2)} = \left\{g \in L_w^{p),\theta} : g'' \in L_w^{p),\theta}\right\}$.

თეორემა 3.1.1. ვთქვათ $1 < p < \infty$, $\theta > 0$ და $w \in A_p$. მაშინ მოიძებნება ისეთი დადებითი მუდმივები c_1 და c_2, რომ

$$c_1\Omega(f,t) \leq K_2\left(f, t; L_w^{p),\theta}, W_{p),\theta,w}^{(2)}\right) \leq c_2\Omega(f,t) \tag{3.1.1}$$

ნებისმიერი დადებითი t რიცხვისთვის და ნებისმიერი $f \in \tilde{L}_w^{p),\theta}$.

დამტკიცება. ვთქვათ, მოცემული დადებითი t რიცხვისთვის ნატურალური რიცხვი n იყოს ისეთი, რომ $\frac{1}{n} \leq t < \frac{2}{n}$. განვიხილოთ ოპერატორთა მიმდევრობა (იხ. მაგალითად, [16])

$$(L_n f)(x) := 3n^2 \int_0^{1/n} \int_0^t \int_{-u}^u f(x+\tau)\, d\tau du dt \ , x \in \mathbb{T}, f \in L_w^{p),\theta}. \qquad (3.1.2)$$

მაშინ ორჯერ გაწარმოება გვიჩვენებს, რომ

$$(L_n f)''(x) = cn^2 \left(I - m_{\frac{1}{n}}\right) f(x), \qquad (3.1.3)$$

სადაც

$$m_{\frac{1}{n}} f(x) = \frac{n}{2} \int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} f(t) dt$$

ოპერატორთა $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$ მიმდევრობა ერთობლივ შემოსაზღვრულია $L_w^{p),\theta}$ სივრცეში. მართლაც მაქსიმალური ფუნქციის შემოსაზღვრულობიდან $L_w^{p),\theta}$ სივრცეში, როცა $w \in A_p$ (3.1.2) ტოლობიდან, მინკოვსკის უტოლობის გამოყენებით, მივიღებთ, რომ

$$\|L_n f\|_{L_w^{p),\theta}} \leq 3n^2 \int_0^{1/n} \int_0^t 2u \|m_u f\|_{L_w^{p),\theta}} \, dudt \leq c3n^2 \|f\|_{L_w^{p),\theta}} \int_0^{1/n} \int_0^t 2u \, dudt \leq c\|f\|_{L_w^{p),\theta}} \qquad (3.1.4)$$

ამავე დროს, (3.1.3) ტოლობა გვიჩვენებს, რომ ყოველი ფიქსირებული n-ისთვის

$(L_n f)''(x) \in L_w^{p),\theta}$ და, მაშასადამე $L_n f \in W_{p),\theta,w}^{(2)}$

(3.1.4) უტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $f - L_n f \in L_w^{p),\theta}(T)$, როცა $f \in L_w^{p),\theta}$ და

$$K_2\left(f, t; L_w^{p),\theta}, W_{p),\theta,w}^{(2)}\right) \leq cK_2\left(f, \frac{1}{n}; L_w^{p),\theta}, W_{p),\theta,w}^{(2)}\right) \leq c\left(\|f - L_n f\|_{L_w^{p),\theta}} + n^{-2}\|(L_n f)''(x)\|_{L_w^{p),\theta}}\right)$$
$$= c(I_1 + I_2) \qquad (3.1.5)$$

შევაფასოთ I_1. გვაქვს

$$I_1 = \|f - L_n f\|_{L_w^{p),\theta}} \leq cn^2 \int_0^{1/n} \int_0^t 2u\|(I - m_u)f\|_{L_w^{p),\theta}}\, dudt$$

$$\leq c \sup_{0<u\leq\frac{1}{n}} \|(I - m_u)f\|_{L_w^{p),\theta}}\, n^2 \int_0^{1/n} \int_0^t 2u\, dudt \leq c \sup_{0<u\leq\frac{1}{n}} \|(I - m_u)f\|_{L_w^{p),\theta}}$$

$$= c\Omega_1\left(f, \frac{1}{n}\right)_{L_w^{p),\theta}}$$

ამგვარად

$$I_1 \leq c\Omega_1\left(f, \frac{1}{n}\right)_{L_w^{p),\theta}} \tag{3.1.6}$$

(3.1.3) ტოლობის ძალით, I_2-ის შეფასება გვაძლევს

$$I_2 = n^{-2}\|(L_n f)''(x)\|_{L_w^{p),\theta}} = c\left\|\left(I - m_{\frac{1}{n}}\right)f\right\|_{L_w^{p),\theta}} \leq c\Omega_1\left(f, \frac{1}{n}\right)_{L_w^{p),\theta}} \tag{3.1.7}$$

(3.1.6) და (3.1.7) უტოლობების ძალით მიიღებთ, რომ

$$K_2\left(f, t; L_w^{p),\theta}, W_{p),\theta,w}^{(2)}\right) \leq c\Omega_1(f, t) \tag{3.1.8}$$

ახლა შევუდგეთ k ფუნქციონალის ქვემოდან შეფასებას. ვთქვათ $g \in W_{p),\theta,w}^{(2)}$,

მაშინ

$$(I - m_h)g(x) = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\big(g(x) - g(x+t)\big)dt = c\int_0^h\int_0^t\int_{-u}^{u} g''(x+\tau)\, d\tau dudt$$

ამიტომ

$$\|(I - m_h)g\|_{L_w^{p),\theta}} = \frac{1}{8h}\int_0^h\int_0^t 2u\left\|\frac{1}{2u}\int_{-u}^{u} g''(x+\tau)d\tau\right\|_{L_w^{p),\theta}} dudt \leq c\int_0^h\int_0^t 2u\|g''(x)\|_{L_w^{p),\theta}}\, dudt$$

$$= ch^2\|g''(x)\|_{L_w^{p),\theta}}$$

შედეგად ჩვენ მივიღებთ, რომ თუ $g \in W_{p),\theta,w}^{(2)}$, მაშინ

$$\Omega_1(g, t)_{L_w^{p),\theta}} \leq ct^2\|g''(x)\|_{L_w^{p),\theta}}$$

სადაც დადებითი მუდმივი c არ არის დამოკიდებული t –ზე და f –ზე.

თუ $f \in L_w^{p),\theta}$, მაშინ ნებისმიერი $g \in W_{p),\theta,w}^{(2)}$ ფუნქციისთვის გვექნება

$$\Omega_1(f,t)_{L_w^{p),\theta}} \le c\left(\|f-g\|_{L_w^{p),\theta}} + t^2\|g''\|_{L_w^{p),\theta}}\right)$$

აქედან იმის გამო, რომ g არის $W_{p),\theta,w}^{(2)}$ კლასის ნებისმიერი ფუნქცია, მივიღებთ, რომ

$$\Omega_1(f,t)_{L_w^{p),\theta}} \le cK_2\left(f,t;L_w^{p),\theta},W''_{p),\theta,w}\right)$$

ამგვარად, თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი 3.1.1. ვთქვათ $1<p<\infty$, $\theta>0$ და $w\in A_p$. მაშინ ყოველი $f\in L_w^{p),\theta}(\mathbb{T})$ ფუნქციისთვის, დადებითი t და k რიცხვებისთვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$\Omega_1(f,kt) \le c(1+[k])^2\Omega_1(f,t)$$

დამტკიცება. ზემოთ დამტკიცებული თეორემის თანახმად,

$$\begin{aligned}\Omega_1(f,kt) &\le c \inf_{g\in W_{p),\theta,w}^{(2)}} \left\{\|f-g\|_{L_w^{p),\theta}} + (kt)^2\|g''\|_{L_w^{p),\theta}}\right\} \\ &\le c(1+[k])^2 \inf_{g\in W_{p),\theta,w}^{(2)}} \left\{\|f-g\|_{L_w^{p),\theta}} + t^2\|g''\|_{L_w^{p),\theta}}\right\} = c(1+[k])^2\Omega_1(f,t)\end{aligned}$$

თეორემა 3.1.2. ვთქვათ, $1<p<\infty$, $\theta>0, k\in\mathbb{N}$ და $w\in A_p$ მაშინ მოიძებნება ისეთი დადებითი c მუდმივი, რომ ყოველი $f\in \tilde{L}_w^{p),\theta}(\mathbb{T})$ ფუნქციისთვის და ნებისმიერი ნატურალური n-ისთვის ადგილი ექნება უტოლობას.

$$E_n(f)_{L_w^{p),\theta}} \le c\Omega_k\left(f,\frac{1}{n}\right)_{L_w^{p),\theta}} \qquad (3.1.9)$$

ეს უტოლობა არის ჯექსონის ცნობილი პირველი უტოლობის ანალოგი $L_w^{p),\theta}$ სივრცეებისათვის.

თეორემა 3.1.2-ის დამტკიცება გარდა თეორემა 3.1.1-ისა ეყრდნობა შემდეგ თეორემას.

თეორემა 3.1.3 ვთქვათ, $1<p<\infty$, $\theta>0, r>0$ და $w\in A_p$ მაშინ მოიძებნება ისეთი დადებითი c მუდმივი ,რომ ყოველი $f\in W_{p),\theta,w}^{(r)}$, ფუნქციისათვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$E_n(f)_{L_w^{p),\theta}} \le \frac{c}{(n+1)^r}E_n\left(f^{(r)}\right)_{L_w^{p),\theta}} \qquad (3.1.10)$$

სადაც c არ არის დამოკიდებული n –ზე და f –ზე.

დამტკიცება. ვთქვათ, $S_n(x,f)$ აღნიშნავს $f\in L_w^{p),\theta}$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივის

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} A_k(x,f)$$

n –ურ კერძო ჯამს.

ჯერ ვაჩვენოთ, რომ ადგილი აქვს ტოლობას

$$f(x) - S_n(x,f) = \cos\frac{\pi r}{2} \sum_{k=n+1}^{\infty} k^{-r} A_k\left(x, f^{(r)}\right) + \sin\frac{\pi r}{2} \sum_{k=n+1}^{\infty} k^{-r} A_k\left(x, \tilde{f}^{(r)}\right) \qquad (3.1.11)$$

მართლაც, განსაზღვრის თანახმად

$$A_k\left(x, f^{(r)}\right) = k^r A_k\left(x + \frac{\pi r}{2k}, f\right)$$

ამის გამო

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{\infty} A_k(x,f) &= A_0(x,f) + \cos\frac{\pi r}{2} \sum_{k=n+1}^{\infty} A_k\left(x + \frac{\pi r}{2k}, f\right) + \sin\frac{\pi r}{2} \sum_{k=n+1}^{\infty} A_k\left(x + \frac{\pi r}{2k}, \tilde{f}\right) \\ &= A_0(x,f) + \cos\frac{\pi r}{2} \sum_{k=n+1}^{\infty} k^{-r} A_k\left(x, f^{(r)}\right) + \sin\frac{\pi r}{2} \sum_{k=n+1}^{\infty} k^{-r} A_k\left(x, \tilde{f}^{(r)}\right)\end{aligned}$$

აქედან მივიღებთ (3.1.11)-ს.

მეორეს მხრივ, აბელის გარდაქმნით მივიღებთ,რომ

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{\infty} k^{-r} A_k\left(x, f^{(r)}\right) &= \sum_{k=n+1}^{\infty} k^{-r}\left[\left(S_k\left(x, f^{(r)}\right) - f^{(r)}(x)\right) - \left(S_{k-1}\left(x, f^{(r)}\right) - f^{(r)}(x)\right)\right] \\ &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(k^{-r} - (k+1)^{-r}\right)\left(S_k\left(x, f^{(r)}\right) - f^{(r)}(x)\right) \\ &+ (n+1)^{-r}\left(S_n\left(x, f^{(r)}\right) - f^{(r)}(x)\right)\end{aligned}$$

ანალოგიურ ტოლობას ადგილი აქვს $\tilde{f}^{(r)}$ ფუნქციისათვის. თუ გადავალთ ნორმებზე, მივიღებთ

$$\begin{aligned}&\|f(x) - S_n(x,f)\| \\ &\le c\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \left(k^{-r} - (k+1)^{-r}\right) E_k\left(f^{(r)}\right) + (n+1)^{-r} E_n\left(f^{(r)}\right)\right) \\ &+ c\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \left(k^{-r} - (k+1)^{-r}\right) E_k\left(\tilde{f}^{(r)}\right) + (n+1)^{-r} E_n\left(\tilde{f}^{(r)}\right)\right)\end{aligned}$$

აქ გამოვიყენეთ ის ფაქტი, რომ

$$\|f(x)-S_k(x,f)\| \le cE_k(f)$$

და, ბოლოს მივიღებთ

$$\begin{aligned}\|f(x)-S_n(x,f)\| \\ &\le c\left(E_n\left(f^{(r)}\right)\left[\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(k^{-r}-(k+1)^{-r}\right)+(n+1)^{-r}\right]\right. \\ &\left.+E_n\left(\tilde{f}^{(r)}\right)\left[\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(k^{-r}-(k+1)^{-r}\right)+(n+1)^{-r}\right]\right) \\ &\le cE_n\left(f^{(r)}\right)\left[\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(k^{-r}-(k+1)^{-r}\right)+(n+1)^{-r}\right] \le \frac{c}{(n+1)^r}E_n\left(f^{(r)}\right)\end{aligned}$$

შევნიშნოთ, რომ შეუღლების ოპერატორის შემოსაზღვრულობის გამო $L_w^{p),\theta}$ სივრცეში, როცა $w \in A_p$, ჩვენ გვაქვს

$$E_n\left(\widetilde{f^{(r)}}\right) \le cE_n\left(f^{(r)}\right)$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 3.1.2-ის დამტკიცება. გადმოცემის სიმარტივისთვის მოვიყვანოთ თეორემის დამტკიცება $r=1$ შემთხვევაში. თუ გამოვიყენებთ თეორემა 3.1.1-ში შემოყვანილ L_n ოპერატორებს, ზემოთ დამტკიცებულ თეორემას და თეორემა 3.1.1-ს მივიღებთ შეფასებებს:

$$\begin{aligned}E_n(f)_{L_w^{p),\theta}} &\le E_n(f-L_nf)_{L_w^{p),\theta}}+E_n(L_nf)_{L_w^{p),\theta}} \le c\|f-L_nf\|_{L_w^{p),\theta}}+n^{-2}\|(L_nf)''\|_{L_w^{p),\theta}} \\ &\le c\Omega\left(f,\frac{1}{n}\right)_{L_w^{p),\theta}}\end{aligned}$$

თეორემა დამტკიცებულია.

ახლა მოვიყვანოთ ჯექსონის მეორე უტოლობის ტიპის უტოლობის დამტკიცება.

თეორემა 3.1.4. ვთქვათ, $1<p<\infty, \theta>0, r>0$ და $w \in A_p$. მოიძებნება ისეთი დადებითი მუდმივი c , რომ ნებისმიერი $f \in W_{p),\theta,w}^{(r)}$ ფუნქციისათვის და ყოველი ნატურალური n-ისთვის ადგილი ექნება უტოლობას

$$E_n(f)_{L_w^{p),\theta}} \le \frac{c}{(n+1)^r}\Omega_k\left(f^{(r)},\frac{1}{n}\right)_{L_w^{p),\theta}} \qquad (3.1.12)$$

დამტკიცება. (3.1.12) უტოლობა ავტომატურად გამომდინარეობს თეორემა 3.1.3 და თეორემა 3.1.2-დან.

§3.2 შებრუნებული ტიპის უტოლობა გრანდ ლებეგის წონიან $L_w^{p),\theta}$ სივრცეებში

ვინაიდან ამ პარაგრაფში დაგვჭირდება ბერნშტეინ-ზიგმუნდის უტოლობა გრანდ ლებეგის წონიან $L_w^{p),\theta}$ სივრცეებში, ამიტომ ზოგადი თეორემა 2.3.1-ის გამოსაყენებლად საჭიროა ვაჩვენოთ, რომ ეს სივრცეები M-ტიპისაა, ე.ი. მასში ადგილი აქვს მარცინკევიჩის ტიპის თეორემას ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივების მულტიპლიკატორების შესახებ ზემოხსენებულ სივრცეებში. შევნიშნოთ, რომ ამგვარი თეორემა ლებეგის წონიან L^p სივრცეებში დამტკიცებული იყო [33] ნაშრომში, როცა წონა ეკუთვნის მაკენჰაუპტის კლასს. ქვემოთ ლებეგის L_w^p სივრცეს ვიგულისხმებთ განსაზღვრულს ნორმით

$$\|f\|_{p,w} = \left(\int_{\mathbb{T}} |f(x)|^p \, w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

ვთქვათ, M^λ-მარცინკევიჩის ოპერატორია. განვსაზღვროთ ახალი ოპერატორი

$f \to M_w^\lambda f$, სადაც $M_w^\lambda f =: w^{\frac{1}{p}} M^\lambda\left(\frac{f}{w^{\frac{1}{p}}}\right)$

ცხადია, რომ M_w^λ ოპერატორის შემოსაზღვრულობა L^p სივრცეში ექვივალენტურია M^λ ოპერატორის შემოსაზღვრულობისა L_w^p სივრცეში. რადგან $w \in A_p$ და ეს კლასი ღიაა, ამიტომ $w \in A_{p-\sigma}$ რაიმე σ-სათვის, $0 < \sigma < p - 1$. მაშასადამე [3] ნაშრომის თანახმად, გვაქვს:

$$\left(\int_{\mathbb{T}} \left|\left(M_w^\lambda f\right)(x)\right|^{p-\sigma} dx\right)^{\frac{1}{p-\sigma}} \leq c\left(\int_{\mathbb{T}} |f(x)|^{p-\sigma}\, dx\right)^{\frac{1}{p-\sigma}}$$

და

$$\left(\int_{\mathbb{T}} \left|\left(M_w^\lambda f\right)(x)\right|^{p} dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq c_1\left(\int_{\mathbb{T}} |f(x)|^{p}\, dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

კალდერონ-ზიგმუნდის საინტერპოლაციო თეორემის (იხ. დებულება 1.5.8) გამოყენებით გვაქვს, რომ

$$\left(\int_{\mathbb{T}} \left|\left(M_w^\lambda f\right)(x)\right|^{p-\varepsilon} dx\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \leq c_2\left(\int_{\mathbb{T}} |f(x)|^{p-\varepsilon}\, dx\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}},$$

სადაც c_2 არ არის დამოკიდებული f-ზე და ε-ზე, $0 < \varepsilon < \sigma$.

ვინაიდან მულტიპლიკატორის ოპერატორი წრფივია, ზემოთ საკმარისი იყო რისი-ტორინის საინტერპოლაციო თეორემაც.

ამიტომ

$$\sup_{0<\varepsilon<\sigma} \varepsilon^{\frac{\theta}{p-\varepsilon}} \left\| M_w^\lambda f \right\|_{L^{p-\varepsilon}} \le c_2 \sup_{0<\varepsilon<\sigma} \varepsilon^{\frac{\theta}{p-\varepsilon}} \|f\|_{L^{p-\varepsilon}} \le c_2 \|f\|_{p),\theta} .$$

ეს უკანასკნელი კი საკმარისია იმისათვის, რომ M_w^λ იყოს შემოსაზღვრული $L^{p,)\theta}$ სივრცეში. ზუსტი ზედა საზღვარი იმ ε-სთვის, რომლისთვისაც $\sigma \le \varepsilon < p-1$, ასეთივე შეფასებას უშვებს (იხ. მაგალითად, თეორემა 3.4.1-ის დამტკიცების ბოლო ნაწილი). M_w^λ ოპერატორის შემოსაზღვრულობა $L^{p),\theta}$ სივრცეში კი M^λ ოპერატორის შემოსაზღვრულობის ექვივალენტურია $L_w^{p),\theta}$ სივრცეში.

თეორემა 2.3.1-ის ძალით $L_w^{p),\theta}$ სივრცეში მართებულია ბერნშტეინ-ზიგმუნდის უტოლობის ტიპის უტოლობა წილადური წარმოებულებისთვის.

თეორემა 3.2.1. ვთქვათ,$1 < p < \infty, \theta > 0$ და $w \in A_p$.მაშინ არსებობს ისეთი დადებითი c მუდმივი, რომ

$$\Omega_k \left(f, \frac{1}{n}\right)_{L_w^{p),\theta}} \le c \left(\frac{1}{n^{2k}} \sum_{\nu=0}^{n} (\nu+1)^{2\nu-1} E_\nu(f)_{L_w^{p),\theta}} \right) \qquad (3.2.1)$$

სადაც c არ არის დამოკიდებული $f \in \tilde{L}_w^{p),\theta}$ ფუნქციაზე და n –ზე.

დამტკიცება.$S_n(f) = S_n(x,f)$ აღნიშნავს f ფუნქციის ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივის n –ურ კერძო ჯამს. რადგან ყოველი ტრიგონომეტრიული პოლინომი მიეკუთვნება $W_{p),\theta,w}^{(2)}$ კლასს, ამიტომ წინა პარაგრაფის და ბერშტეინ-ზიგმუნდის ტიპის უტოლობის გამოყენებით მივიღებთ

$$\Omega_k(S_{2^{m+1}}(f),\delta)_{L_w^{p),\theta}} \le c\delta^2 \left\|S''_{2^{m+1}}(f)\right\| \le c\delta^2 \left\{ \|S''_1(f) - S''_0(f)\| + \sum_{i=1}^{m} \left\|S''_{2^{i+1}}(f) - S''_{2^i}(f)\right\| \right\}$$

$$\le c\delta^2 \left\{ E_0(f) + \sum_{i=1}^{m} 2^{(i+1)2} E_{2^i}(f) \right\} \le c\delta^2 \left\{ E_0(f) + 2^2 E_1(f) + \sum_{i=1}^{m} 2^{(i+1)2} E_{2^i}(f) \right\}$$

$\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$მიმდევრობის არაზრდადობის გამო გვექნება

$$2^{(i+1)2} E_{2^i}(f) \le c \sum_{\nu=2^{i-1}+1}^{2^m} \nu E_\nu(f)$$

ამიტომ

$$\Omega(S_{2^{m+1}}(f),\delta) \le c\delta^2\left(E_0(f)+\sum_{\nu=1}^{2^m}\nu E_\nu(f)\right) \qquad (3.2.2)$$

მეორეს მხრივ,

$$\Omega(f,\delta) \le \Omega(f-S_{2^{m+1}}(f),\delta)-\Omega(S_{2^{m+1}}(f),\delta) \le \|f-S_{2^{m+1}}(f)\|+\Omega(S_{2^{m+1}},\delta)$$
$$\le cE_{2^{m+1}}(f)+\Omega(S_{2^{m+1}},\delta) \qquad (3.2.3)$$

იმის გამო, რომ

$$E_{2^{m+1}}(f) \le \frac{c}{n^2}\sum_{\nu=2^{m-1}+1}^{2^m}\nu E_\nu(f)$$

თუ ავირჩევთ m –ს ისე, რომ$2^m \le n < 2^{m+1}$, მაშინ (3.2.2) და (3.2.3) უტოლობებიდან მივიღებთ (3.2.1). დამტკიცება $k>1$-ისთვის ანალოგიურია.

თეორემა დამტკიცებულია.

ჯექსონის პირველი უტოლობის ტიპის უტოლობიდან და ზემოთ დამტკიცებული შებრუნებული უტოლობიდან გამომდინარეობს შემდეგი შედეგები:

შედეგი 3.2.1 (მარშოს ტიპის უტოლობა). ვთქვათ, $f \in \tilde{L}_w^{p),\theta}, w \in A_p$. მაშინ ყოველი $m<k$-სთვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$\Omega_m(f,\delta)_{L_w^{p),\theta}} \le c\delta^{2m}\int_\delta^1 \tau^{-2m-1}\Omega_k(f,\tau)_{L_w^{p),\theta}}d\tau$$

სადაც მუდმივი c არ არის დამოკიდებული f –ზე და δ –ზე.

შედეგი 3.2.2 ვთქვათ, $f \in \tilde{L}_w^{p),\theta}, w \in A_p\ (1<p<\infty, \theta>0)$. თუ

$$E_n(f)_{L_w^{p),\theta}} = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right), \alpha>0$$

მაშინ მოცემული k –სთვის გვაქვს

$$\Omega_k\left(f,\frac{1}{n}\right)_{L_w^{p),\theta}} = \begin{cases} O(\delta^\alpha) & \text{თუ} \quad k>\frac{\alpha}{2} \\ O\left(\delta^{2k}\log\frac{1}{\delta}\right) & \text{თუ} \quad k=\frac{\alpha}{2} \\ \delta^{2k} & \text{თუ} \quad k<\frac{\alpha}{2} \end{cases}$$

განვიხილოთ $\tilde{L}_w^{p),\theta}$ კლასის ისეთი ფუნქციების ქვესიმრავლე, რომლისთვისაც

$$\Omega_k(f,\delta)_{L_w^{p),\theta}} = O(\delta^\alpha)$$

სადაც $\alpha > 0$ და $k := \left[\frac{\alpha}{2} + 1\right]$. ეს კლასი აღვნიშნოთ $H^\alpha_{p),w}$.

ჯექსონის უტოლობის ანალოგი და ზემოთ მიღებული შედეგი 3.2.2 გვიჩვენებს, რომ მართებულია შემდეგი.

თეორემა 3.2.2. იმისათვის,რომ f ფუნქცია მიეკუთვნებოდეს $H^\alpha_{p),w}$ კლასს, აუცილებელი და საკმარისია,რომ

$$E_n(f)_{L_w^{p),\theta}} = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$$

§3.3 ნიკოლსკის უტოლობის ტიპის უტოლობა $L_w^{p),\theta}$ სივრცეში

თავდაპირველად დავამტკიცოთ ნიკოლსკის უტოლობის ტიპის უტოლობა გრანდ ლებეგის წონიან სივრცეებში.

თეორემა 3.3.1. ვთქვათ,$1 < p < \infty, \theta > 0$ და $w \in A_p$ მაშინ არსებობს ისეთი დადებითი c მუდმივი, რომ ნებისმიერი T_n ტრიგონომეტრიული პოლინომისთვის, რომლის ხარისხი არ აღემატება n –ს ადგილი აქვს უტოლობას

$$\left\| T_n w^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \right\|_{L_w^{q),\theta\frac{q}{p}}} \le c n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|T_n\|_{L_w^{p),\theta}} \qquad (3.3.1)$$

სადაც c მუდმივი არ არის დამოკიდებული T_n პოლინომზე.

დამტკიცება. ჩვენ კვლავ გამოვიყენებთ წარმოდგენას

$$T_n(x) = a_0(T) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T_n^{(s)}(x-t)\psi_t^s(t)dt,$$

სადაც

$$\psi_+(t) = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{cos\left(kt - \frac{s\pi}{2}\right)}{k^s} \quad , \quad s = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}.$$

აქ $T_n^{(s)}$-ის ქვეშ ჩვენ გვესმის T_n პოლინომის წილადური s-რიგის წარმოებული. კვლავ თუ გამოვიყენებთ $\psi_+(t)$ –ს შეფასებას

$$|\psi_+(t)| \le |t|^{\alpha-1} \quad |t| \le \pi$$

მივიღებთ,რომ

$$|T_n(x)| \leq |a_0(T)| + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\left|T_n^{(s)}(x-t)\right|}{|t|^{1-s}}dt \leq |a_0(T)| + \frac{1}{2\pi}\int_{-2\pi}^{2\pi}\frac{\left|T_n^{(s)}(t)\right|}{|x-t|^{1-s}}dt$$

გამოვიყენოთ **დებულება 1.4.7** მაშინ გვექნება

$$\| T_n w^s\|_{L_w^{q),\theta\frac{q}{p}}} \leq c\left\|T_n^{(s)}\right\|_{L_w^{p),\theta}}$$

მარჯვენა მხარეში წილადური წარმოებულებისთვის ბერშტეინის უტოლობის ტიპის უტოლობის გამოყენებას მივყევართ (3.3.1) უტოლობამდე.

შევნიშნოთ, რომ ამ უტოლობაზე დაყრდნობით და წინა პარაგრაფის თეორემა 3.1.2-ის მტკიცების მეთოდის გამოყენებით, ადვილად დავრწმუნდებით ქვემოთ მოყვანილი დებულების მართებულობაში.

თეორემა 3.3.2. ვთქვათ $1 < p < q < \infty, \theta > 0, \theta_1 \geq \vartheta\frac{q}{p}$, და $w \in A_p$. მაშინ მოიძებნება ისეთი დადებითი მუდმივი c ,რომ ნებისმიერი $f \in W_{p),\theta,w}^{(r)}$ ფუნქციისათვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$E_n(fw^s)_{L_w^{q,\theta_1}} \leq c(n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}E_n(f)_{L^{p),\theta}} + \sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}-1}E_n(f)_{L^{p),\theta}})$$

უკანასკნელი მწკრივის კრებადობის პირობებში. ამ უტოლობაში c მუდმივი არ არის დამოკიდებული f –ზე და n –ზე.

§3.4 ჰარმონიული ანალიზის ოპერატორების შემოსაზღვრულობის შესახებ $\mathcal{L}_w^{p),\theta}$ სივრცეებში

ამ პარაგრაფში დავამტკიცებთ ზოგად თეორემებს ოპერატორთა შემოსაზღვრულობის შესახებ $\mathcal{L}_w^{p),\theta}$ სივრცეში, საიდანაც გამოვიყვანთ შემდგომში ჩვენთვის საჭირო ინტეგრალური და ფურიეს ოპერატორების შემოსაზღვრულობას ხსენებულ სივრცეში.

თეორემა 3.4.1. ვთქვათ ნახევრადწრფივი ოპერატორი K შემოსაზღვრულია $L_{w^p}^p$ სივრცეში ყოველი p-სთვის $1 < p < \infty$ და ნებისმიერი $w \in \mathbb{A}_p$, მაშინ ის შემოსაზღვრული იქნება აგრეთვე $\mathcal{L}_w^{p),\theta}$ სივრცეში, სადაც $\theta > 0$.

დამტკიცება. შევნიშნოთ, რომ $w \in \mathbb{A}_p$ ნიშნავს, რომ $w^p \in A_p$. ვაჩვენოთ, რომ თუ $w^p \in A_p$, მაშინ მოიძებნება ისეთი $\sigma, 0 < \sigma < p-1$, რომ $w^{p-\sigma} \in A_{p-\sigma}$. რადგან $w^p \in A_p$ და A_p

კლასი ღიაა, ამიტომ მოიძებნება ისეთი, $\sigma, 0 < \sigma < p-1$ რომ $w^p \in A_{p-\sigma}$. იენსენის უტოლობის გამოყენების შედეგად $\frac{p}{p-\sigma}$ მაჩვენებლის მიმართ, მივიღებთ

$$\left(\frac{1}{|I|}\int_I w^{p-\sigma}(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p-\sigma}}\left(\frac{1}{|I|}\int_I w^{(p-\sigma)(1-p-\sigma)'}(x)\,dx\right)^{\frac{1}{(p-\sigma)'}}$$
$$\leq \left(\frac{1}{|I|}\int_I w^{p}(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{|I|}\int_I w^{(p-\sigma)\left(1-(p-\sigma)'\right)}(x)\,dx\right)^{\frac{p-\sigma}{(p-\sigma)'}\cdot\frac{1}{p}} < +\infty$$

რადგან $\frac{p-\sigma}{(p-\sigma)'} = p-\sigma-1$ და $w^{p-\sigma} \in A_{p-\sigma}$.

ახლა განვიხილოთ ოპერატორი

$$f \to K_w f,$$

სადაც

$$K_w f \coloneqq wK\left(\frac{f}{w}\right)$$

შევნიშნოთ, რომ K_w ოპერატორის შემოსაზღვრულობა L^p სივრცეში ექვივალენტურია K ოპერატორის შემოსაზღვრულობისა $L^p_{w^p}$ სივრცეში. მართლაც,

თუ

$$\int_{\mathbb{T}} |Kf(x)|^p w^p(x)dx \leq c\int_{\mathbb{T}} |f(x)|^p w^p(x)dx\,,$$

მაშინ

$$\int_{\mathbb{T}} |K_w\varphi(x)|^p dx \leq \int_{\mathbb{T}} \left|K\left(\frac{\varphi}{w}\right)(x)\right|^p w^p(x)dx \leq c\int_{\mathbb{T}} |\varphi(x)|^p dx\,, \varphi \in L^p$$

და, პირუკუ.

რადგან $w^p \in \mathbb{A}_p$, $w^{p-\sigma} \in A_{p-\sigma}$, $0 < \sigma < p-1$ და პირობის თანახმად, K შემოსაზღვრულია $L^p_{w^p}$ სივრცეში ყოველი p-სთვის, ამიტომ ზემოთ გაკეთებული შენიშვნის ძალით K_w შემოსაზღვრული იქნება როგორც L^p, ასევე $L^{p-\sigma}$ სივრცეში:

$$\int_{\mathbb{T}} |K_w f(x)|^{p-\sigma} dx \leq c\int_{\mathbb{T}} |f(x)|^{p-\sigma} dx$$

და

$$\int_{\mathbb{T}} |K_w f(x)|^p dx \leq c_1 \int_{\mathbb{T}} |f(x)|^p dx$$

სადაც c და c_1 მუდმივები f-ზე არ არის დამოკიდებული.

გამოვიყენოთ კალდერონ -ზიგმუნდის საინტერპოლაციო თეორემა, რომელიც წარმოადგენს რისი-ტორინის თეორემის განზოგადებას ნახევრადწრფივი ოპარატორებისთვის. მაშინ დავასკვნით, რომ

$$\int_{\mathbb{T}} |K_w f(x)|^{p-\varepsilon} dx \leq c_2 \int_{\mathbb{T}} |f(x)|^{p-\varepsilon} dx,$$

ყოველი ε-სთვის, $0 < \varepsilon < \delta$ და ყოველი f-სთვის, ამასთანავე დადებითი c_2 მუდმივი არ არის დამოკიდებული ε-ზე.

ამიტომ გვექნება

$$I = \sup_{0<\varepsilon\leq\sigma} \varepsilon^{\frac{\theta}{p-\varepsilon}} \|K_w f\|_{L^{p-\varepsilon}} \leq c \sup_{0<\varepsilon<\sigma} \varepsilon^{\frac{\theta}{p-\varepsilon}} \|f\|_{p-\varepsilon} \leq c\|f\|_{L^{p),\theta}} \tag{3.4.1}$$

მეორეს მხრივ, თუ გამოვიყენებთ ჰელდერის უტოლობას $\frac{p-\sigma}{p-\varepsilon}$ მაჩვენელით და გავითვალისწინებთ იმას, რომ $\left(\frac{p-\sigma}{p-\varepsilon}\right)' = \frac{p-\sigma}{\varepsilon-\sigma}$, როცა $\sigma < \varepsilon < p-1$, მივიღებთ, რომ

$$\|K_w f\|_{L^{p-\varepsilon}} \leq \|K_w f\|_{L^{p-\sigma}} (2\pi)^{\frac{\epsilon-\sigma}{(p-\sigma)(p-\varepsilon)}} \tag{3.4.2}$$

შემდეგ იმის გამო, რომ $\sigma < p-1$ და $\varepsilon \in (\sigma, p-1)$ გვექნება

$$0 < \frac{\epsilon - \sigma}{(p-\sigma)(p-\varepsilon)} < \frac{p-1-\sigma}{p-\sigma} \text{ და } (p-1)\sigma^{-\frac{1}{p-\sigma}} > 1$$

თუ გამოვიყენებთ (3.2.1) და (3.2.2) უტოლობებს, მივიღებთ

$$
\begin{aligned}
\|K_w f\|_{L^{p),\theta}} &= \max\left\{\sup_{0<\varepsilon\le\sigma} \varepsilon^{\frac{\theta}{p-\varepsilon}}\|k_w f\|_{L^{p-\varepsilon}},\ \sup_{\sigma<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{\theta}{p-\varepsilon}}\|k_w f\|_{L^{p-\varepsilon}}\right\} \\
&\le \max\left\{I,\ \sup_{\sigma<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{\theta}{p-\varepsilon}}\|k_w f\|_{L^{p-\sigma}}\,(2\pi)^{\frac{\epsilon-\sigma}{(p-\sigma)(p-\varepsilon)}}\right\} \\
&= \max\left\{I,\ \sup_{\sigma<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{\theta}{p-\varepsilon}}\sigma^{-\frac{\theta}{p-\sigma}}\sigma^{\frac{\theta}{p-\sigma}}\|k_w f\|_{L^{p-\sigma}}\,(2\pi)^{\frac{\epsilon-\sigma}{(p-\sigma)(p-\varepsilon)}}\right\} \\
&\le \max\left\{I, I\cdot \sup_{\sigma<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{\theta}{p-\varepsilon}}\sigma^{-\frac{\theta}{p-\sigma}}\,(2\pi)^{\frac{p-1-\sigma}{(p-\sigma)}}\right\} \\
&\le I\max\left\{1, (p-1)^{\theta}\sigma^{-\frac{p}{p-\sigma}}(2\pi)^{\frac{p-1-\sigma}{(p-\sigma)}}\right\} = c\|f\|_{L^{p),\theta}} \quad .
\end{aligned}
$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ K_w ოპერატორის შემოსაზღვრულობა $L^{p),\theta}$ სივრცეში K ოპერატორის $\mathcal{L}_w^{p),\theta}$ სივრცეში შემოსაზღვრულობის ექვივალენტურია.

თეორემა დამტკიცებულია.

დამტკიცებული თეორემიდან გამომდინარეობს

თეორემა 3.4.2. ვთქვათ, $w \in \mathbb{A}_p$, მაშინ ჰარდი-ლიტლვუდის მაქსიმალური, სინგულარული და მარცინკევიჩის მულტიპლიკატორების ოპერატორები შემოსაზღვრულია $\mathcal{L}_w^{p),\theta}$ სივრცეში.

თეორემა 3.4.3. ვთქვათ, ყოველი $w \in \mathbb{A}_{p,q}, (1 < p < q < \infty)$ ნახევრადწრფივი ოპერატორი K აკმაყოფილებს პირობას

$$\left(\int_{\mathbb{T}} |(Kf)(x)|^q w^q(x)dx\right)^{1/q} \le c\left(\int_{\mathbb{T}} |f(x)|^p w^p(x)dx\right)^{1/p} \qquad (3.4.3)$$

ყოველი, $f \in L^p_{w^p}$, სადაც c არ არის დამოკიდებული f ფუნქციაზე.

მაშინ თუ $0 < s < \frac{1}{p}, \frac{1}{p} - \frac{1}{q} = s > 0$ და $\theta > 0$, ადგილი აქვს უტოლობას

$$\|(Kf)(x)w(x)\|_{L^{q),\frac{q}{p}\theta}} \le c\|fw\|_{L^{p),\theta}}, f \in L_w^{p),\theta}, \qquad (3.4.4)$$

ე.ი. K შემოსაზღვრულია $\mathcal{L}_w^{p),\theta}$ სივრციდან $\mathcal{L}_w^{q),\frac{q}{p}\theta}$ სივრცეში.

დამტკიცება. განვიხილოთ ოპერატორი

$$K_w f = wK\left(\frac{f}{w}\right)$$

იმის ანალოგიურად, როგორც თეორემა 3.4.1-ის დამტკიცებისას გვქონდა ადვილად შესამოწმებელია, რომ K ოპერატორის შემოსაზღვრულობა $L^p_{w^p}$ სივრციდან $L^q_{w^q}$ სივრცეში

ექვივალენტურია K_w ოპერატორის შემოსაზღვრულობისა L^p სივრციდან L^q სივრცეში. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\|w\|_{\mathbb{A}_{p,q}} = \sup_{\mathrm{I}} \left(\frac{1}{|I|}\int_I w^q(x)\,dx\right)^{1/q} \left(\frac{1}{|I|}\int_I w^{p'}(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p'}}$$

ახლა ვაჩვენოთ, რომ თუ $w \in \mathbb{A}_{p,q}$, მაშინ $w \in \mathbb{A}_{p-\sigma,q-\delta}$ რაიმე σ და δ-სათვის პირობით $0 < \sigma < q-1, 0 < \delta < p-1$ და

$$\|w\|_{\mathbb{A}_{p-\sigma,q-\delta}} \leq \|w^r\|_{\mathbb{A}_{\frac{p}{r},\frac{q}{r}}}$$

რაიმე $r > 1$-სათვის.

შევნიშნოთ, რომ პირობა $w \in \mathbb{A}_{p,q}$ ექვივალენტურია იმისა, რომ $w^q \in \mathbb{A}_{1+\frac{q}{p'}}$. ამიტომ მოიძებნება ისეთი $\varepsilon > 0$, რომ $w^q \in \mathbb{A}_{1+\frac{q}{p'}-\varepsilon}$. ვთქვათ, $r > 1$ არის ისეთი, რომ

$$1 + \frac{q}{p'} - \varepsilon = 1 + \frac{\frac{q}{r}}{\left(\frac{p}{r}\right)'}$$

ეს შესაძლებელია იმიტომ, რომ $r \to 1 + \frac{qr}{\left(\frac{p}{r}\right)'}$ ფუნქცია r-ის უწყვეტი, ზრდადი ფუნქციაა.

მეორეს მხრივ

$$w^q \in \mathbb{A}_{1+\frac{\frac{q}{r}}{\left(\frac{p}{r}\right)'}} \Leftrightarrow \|w^r\|_{\mathbb{A}_{\frac{p}{r},\frac{q}{r}}} < +\infty\,,$$

უფრო მეტიც

$$\|w^q\|_{\mathbb{A}_{1+\frac{\frac{q}{r}}{\left(\frac{p}{r}\right)'}}} = \|w^r\|_{\mathbb{A}_{\frac{p}{r},\frac{q}{r}}} \qquad (3.4.5)$$

ავარჩიოთ ისეთი საკმარისად მცირე დადებითი σ და შესაბამისად δ, რომ

$$\frac{1}{p-\sigma} - \frac{1}{q-\delta} = s$$

თუ σ საკმარისად მცირეა, მაშინ δ ასევე საკმარისად მცირეა.

მაშინ

$$\|w\|^{\frac{1}{q-\delta}}_{\mathbb{A}_{p-\sigma,q-\delta}} = \sup_{\mathrm{I}}\left(\frac{1}{|I|}\int_I w^{q-\delta}(x)\,dx\right)^{\frac{1}{q-\delta}}\left(\frac{1}{|I|}\int_I w^{-(p-\sigma)'}(x)\,dx\right)^{\frac{1}{(p-\sigma)'}}$$

პირველ თანამამრავლში გამოვიყენოთ ჰელდერის უტოლობა. მაშინ გვექნება

$$\|w\|^{\frac{1}{q-\delta}}_{\mathbb{A}_{p-\sigma,q-\delta}} = \sup_{\mathrm{I}}\left(\frac{1}{|I|}\int_I w^{q}(x)\,dx\right)^{\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{|I|}\int_I w^{-(p-\sigma)'}(x)\,dx\right)^{\frac{1}{(p-\sigma)'}} \qquad (3.4.6)$$

შევნიშნოთ, რომ $p' < \frac{pr}{p-r}, r > 1$-სთვის. ამიტომ σ შეგვიძლია ავიღოთ იმდენად მცირე, რომ $p' < (p-\sigma)' < \frac{pr}{p-r}$. ისევ ჰელდერის უტოლობის გამოყენებით (3.4.6)-დან ვღებულობთ

$$\|w\|^{\frac{1}{q-\delta}}_{\mathbb{A}_{p-\sigma,q-\delta}} \le \sup_{\mathrm{I}}\left(\frac{1}{|I|}\int_I w^{q}(x)\,dx\right)^{\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{|I|}\int_I w^{-\frac{pr}{p-r}}(x)\,dx\right)^{\frac{p-r}{pr}} = \|w^r\|^{\frac{1}{q}}_{\mathbb{A}_{\frac{p}{r},\frac{q}{r}}}$$

აქედან (3.4.5)-ის ძალით,

$$\|w\|_{\mathbb{A}_{p-\sigma,q-\delta}} \le \|w^r\|^{\frac{q-\delta}{q}}_{\mathbb{A}_{\frac{p}{r},\frac{q}{r}}} \le \|w^r\|_{\mathbb{A}_{\frac{p}{r},\frac{q}{r}}} < +\infty$$

საკმარისად მცირე σ-სათვის.

მოვიგონოთ, რომ σ და δ ისე გვაქვს არჩეული, რომ

$$\frac{1}{p-\sigma} - \frac{1}{q-\delta} = s$$

რადგან ზემოთ დამტკიცებულის თანახმად $w \in \mathbb{A}_{p-\sigma,q-\delta}$, ამიტომ პირობის თანახმად, K_w ოპერატორი ერთდროულად შემოსაზღვრულია L^p სივრციდან L^q-ში და $L^{p-\sigma}$-დან $L^{q-\delta}$ სივრცეში. გამოვიყენოთ კალდერონ-ზიგმუნდის საინტერპოლაციო თეორემა, საიდანაც დავასკვნით, რომ

$$\|K_w\|_{L^{p-\eta}\to L^{q-\nu}} \le \|K_w\|^{t}_{L^p\to L^q}\|K_w\|^{1-t}_{L^{p-\sigma}\to L^{q-\delta}}, \quad (3.4.7)$$

სადაც

$$\frac{1}{p-\eta} = \frac{t}{p} + \frac{1-t}{p-\sigma}, \qquad \frac{1}{q-\nu} = \frac{t}{q} + \frac{1+t}{q-\delta}.$$

შევნიშნოთ, რომ

$$\frac{1}{p-\eta}-\frac{1}{q-\nu}=\frac{t}{p}-\frac{t}{q}+\frac{1-t}{p-\sigma}-\frac{1-t}{q-\delta}=t\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)+(1-t)\left(\frac{1}{p-\sigma}-\frac{1}{q-\delta}\right)=ts+(1-t)s$$
$$=s$$

შემდეგ, (3.4.7)-ის ძალით,

$$\sup_{0<\nu<\delta}\left(\nu^{\frac{q}{p}\theta}\int_I |K_w f(x)|^{q-\nu}\,dx\right)^{\frac{1}{q-\nu}} \le c\sup_{0<\eta<\delta}\left(\eta^{\frac{\theta}{p-\eta}}\|f\|_{L^{p-\eta}}\right) \le c\|f\|_{L^{p),\theta}} \qquad (3.4.8)$$

რაც შეეხება , სიდიდის

$$\sup_{\delta\le\nu<q-1}\left(\nu^{\frac{q}{p}\theta}\int_I |K_w f(x)|^{q-\nu}\,dx\right)^{\frac{1}{q-\nu}}$$

შეფასებას, ჰელდერის უტოლობის გამოყენებით, ისევე როგორც თეორემა 3.4.1-ის დამტკიცებისას დადის (3.4.8)-ის შეფასებაზე.

ამგვარად, დავამტკიცეთ, რომ K_w შემოსაზღვრულია $L^{p),\theta}$ სივრციდან $L^{q,\theta\frac{q}{p}}$ სივრცეში. მაგრამ ეს ფაქტი იმის ექვივალენტურია, რომ K ოპერატორი იქნება შემოსაზღვრული $\mathcal{L}_w^{p),\theta}$სივრციდან $\mathcal{L}_w^{q),\frac{q}{p}\theta}$ სივრცეში.

თეორემა დამტკიცებულია.

ვთქვათ, K ოპერატორი აღნიშნავს ერთ-ერთ მათგანს შემდეგი ოპერატორებიდან

$$(I_s f)(x)=\int_J \frac{f(t)}{|x-t|^{1-s}}dt\,, 0<s<1$$

რისის პოტენციალი და

$$(M_s f)(x)=\sup_{I\subset J}\frac{1}{|I|^{1-s}}\int_I |f(t)|dt\,.$$

მაშინ თეორემა 3.4.3-დან და ამ ოპერატორების შემოსაზღვრულობიდან $L^p_{w^p}$ სივრციდან $L^q_{w^q}$ სივრცეში გამომდინარეობს, რომ მართებულია

თეორემა 3.4.4. ვთქვათ, $w\in\mathbb{A}_{p,q}$, $0<s<\frac{1}{p},\frac{1}{p}-\frac{1}{q}=s>0$ და $\theta>0$. მაშინ $I_s(M_s)$ შემოსაზღვრულია $\mathcal{L}_w^{p),\theta}$ სივრციდან $\mathcal{L}_w^{q).\theta\frac{q}{p}}$ სივრცეში.

§3.5 ბერნშტეინ-ზიგმუნდისა და ნიკოლსკის უტოლობების ტიპის უტოლობების კიდევ ერთი ვარიანტი გრანდ ლებეგის წონიან სივრცეებში

იმისათვის, რომ დადგენილ იქნეს შებრუნებული უტოლობები სივრცის განსხვავებული მაჩვენებლებით უტოლობების სხვადასხვა მხარეს, ამისათვის უფრო მოსახერხებელია სივრცის ნორმის განსაზღვრაში წონა განვიხილოთ არა როგორც ზომის წარმომქმნელი ფუნქცია, არამედ როგორც მამრავლი. როგორც შესავალში იყო აღნიშნული ასეთი განხილვა იძლევა განსხვავებას იმ გრანდ ლებეგის წონიანი სივრცეებიდან, სადაც წონა განიხილება, როგორც ზომა. კიდევ ერთხელ მოვიგონოთ $\mathcal{L}_w^{p),\theta}$ სივრცის განსაზღვრა.

ვთქვათ, w არის რაიმე წონითი ფუნქცია,$1 < p < \infty, \theta > 0$ მაშინ განვსაზღვროთ

$$\mathcal{L}_w^{p),\theta} = \{f: \|fw\|_{L^{p),\theta}} < +\infty\} \qquad (3.5.1)$$

შესაბამისად, განისაზღვრება ქვესივრცე $\tilde{\mathcal{L}}_w^{p),\theta}$, როგორც $L^p(\mathbb{T}, w)$ სივრცის ჩაკეტვა $\mathcal{L}_w^{p),\theta}$სივრცის ნორმით, სადაც

$$L^p(\mathbb{T}, w) = \{f: \|fw\|_{L^p} < +\infty\}$$

ჩვენ დაგვჭირდება წონათა $\mathbb{A}_{p,q}$ კლასი, რომელზეც უკვე იყო მსჯელობა §3.4-ში. მოვიგონოთ, რომ ეს კლასი განისაზღვრება პირობით

$$\sup_I \left(\frac{1}{|I|}\int_I w^q(x)dx\right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{|I|}\int_I w^{p'}(x)dx\right)^{\frac{1}{p'}} < \infty \qquad (3.5.2)$$

ჰელდერის უტოლობის გამოყენებით ვრწმუნდებით,რომ თუ $w \in \mathbb{A}_{p,q}$, მაშინ $w^p \in A_p$.

თეორემა 3.5.1 (ბერნშტეინ-ზიგმუნდის უტოლობის ტიპის უტოლობა). ვთქვათ, $1 < p < \infty, \theta > 0,\ \alpha > 0$ და $w^p \in A_p$, მაშინ მოიძებნება ისეთი დადებითი c რიცხვი, რომ n −რიგის ნებისმიერი ტრიგონომეტრიული პოლინომის α −რიგის წილადური წარმოებულისთვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$\left\|T_n^{(\alpha)}\right\|_{\mathcal{L}_w^{p),\theta}} \le cn^\alpha \|T_n\|_{\mathcal{L}_w^{p),\theta}} \qquad (3.5.3)$$

სადაც c არ არის დამოკიდებული n −ზე.

დამტკიცება. ვთქვათ

$$T_n(x) = \sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu cos\nu x + b_\nu sin\nu x)$$

განვიხილოთ რიცხვთა მიმდევრობა

$$\lambda_{\nu,n} = \begin{cases} \frac{\nu^\alpha}{n^\alpha} & ,1 \le \nu \le n \\ 0 & ,\nu > n \end{cases}$$

ცხადია, ეს მიმდევრობა აკმაყოფილებს მარცინკევიჩის მულტიპლიკატორების პირობას მუდმივი M-ით, რომელიც არ არის დამოკიდებული n –ზე. თეორემა 3.4.2-ის ძალით, ეს იმას ნიშნავს, რომ მოიძებნება ისეთი დადებითი მუდმივი c , რომ

$$\left\| \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_{\nu,n}(a_\nu cos\nu x + b_\nu sin\nu x) \right\|_{L_w^{p),\theta}} \le cn^\alpha \|T_n(x)\|_{L_w^{p),\theta}}$$

ანუ

$$\left\| \sum_{\nu=1}^{n} \nu^\alpha(a_\nu cos\nu x + b_\nu sin\nu x) \right\|_{L_w^{p),\theta}} \le cn^\alpha \|T_n(x)\|_{L_w^{p),\theta}}$$

მეორეს მხრივ

$$T_n^{(\alpha)}(x) = t_n^\alpha(x)\cos\frac{\pi\alpha}{2} - \widetilde{t_n^\alpha(x)}\sin\frac{\pi\alpha}{2}$$

სადაც

$$t_n^\alpha(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \nu^\alpha(a_\nu cos\nu x + b_\nu sin\nu x)$$

ხოლო ~ ოპერაცია აღნიშნავს შეუღლებულს.

ახლა საკმარისია გამოვიყენოთ შეუღლების ოპერაციის შემოსაზღვრულობა $L_w^{p),\theta}$ სივრცეებში და თეორემა დამტკიცებული იქნება.

ახლა ჩვენ შეგვიძლია დავადგინოთ ნიკოლსკის უტოლობის ტიპის უტოლობა.

თეორემა 3.5.2. ვთქვათ $1 < p < \infty, \theta > 0, \theta_1 > \theta$ და $w \in \mathbb{A}_{p,q}, 1 < p < q < \infty$ მაშინ ყოველი ტრიგონომეტრიული პოლინომისთვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$\|T_n\|_{\mathcal{L}_w^{q),\theta_1}} \le cn^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|T_n\|_{\mathcal{L}_w^{p),\theta}} \qquad (3.5.4)$$

სადაც c არ არის დამოკიდებული T_n –ზე და n –ზე .

დამტკიცება. იმის ანალოგიურად, როგორც გვქონდა ნიკოლსკის უტოლობის ტიპის უტოლობის დამტკიცებისას ცვლადმაჩვენებლიან ლებეგის სივრცეებში, გვაქვს წარმოდგენა

$$|T_n(x) - a_0(T)| \le c \int_{-2\pi}^{2\pi} \frac{\left|T_n^{(s)}(t)\right|}{|x-t|^{1-s}} dt, \qquad x \in (-\pi, \pi)$$

სადაც $s = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ და $T_n^{(s)}$ აღნიშნავს ტრიგონომეტრიული პოლინომის s-რიგის წილადურ წარმოებულს. ამიტომ თუ გამოვიყენებთ თეორემა 3.4.4-ს მაშინ დავასკვნით, რომ

$$\|T_n(x) - a_0(T)\|_{\mathcal{L}_w^{q),\theta_1}} \le c\left\|T_n^{(s)}(t)\right\|_{\mathcal{L}_w^{p),\theta}}$$

შემდეგ გამოვიყენოთ (3.5.3), რის შედეგადაც დავასკვნით, რომ

$$\|T_n(x) - a_0(T)\|_{\mathcal{L}_w^{q),\theta_1}} \le cn^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|T_n(t)\|_{\mathcal{L}_w^{p),\theta}} \qquad (3.5.5)$$

ამავე დროს, იმის გამო, რომ თუ $w \in \mathbb{A}_{p,q}$, მაშინ ჰელდერის უტოლობით დავადგენთ, რომ $w^p \in A_p$. აქედან კი გამომდინარეობს, რომ $w^{p-\varepsilon} \in A_{p-\varepsilon}$ საკმარისად მცირე $0 < \varepsilon < p-1$ -ებისთვის. დავაფიქსიროთ ასეთი ε_0. მაშინ

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} w^{-\frac{p-\varepsilon_0}{p-\varepsilon_0-1}} dx\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon_0}} < +\infty$$

უფრო მეტიც, ჰელდერის უტოლობის გამოყენებით მივიღებთ

$$|a_0(T)| \le c \int_{-\pi}^{\pi} |T_n(x)| dx \le c\left(\int_{-\pi}^{\pi} |T_n(x) w(x)|^{p-\varepsilon_0} dx\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon_0}} \left(\int_{-\pi}^{\pi} w^{-\frac{p-\varepsilon_0}{p-\varepsilon_0-1}}(x) dx\right)^{1-\frac{1}{p-\varepsilon_0}}$$
$$\le c\|T_n(x) w(x)\|_{L^{p-\varepsilon_0}} \qquad (3.5.6)$$

მეორეს მხრივ, თუ გავითვალისწინებთ, რომ

$$\sup_{0<\varepsilon\le\varepsilon_0} \varepsilon^{\frac{\theta}{p-\varepsilon}} = (p-1)^{\frac{\theta}{\varepsilon_0}}$$

ამგვარად (3.5.6)-დან გვექნება

$$|a_0(T)| \le c \sup_{0<\varepsilon\le\varepsilon_0} \varepsilon^{\frac{\theta}{p-\varepsilon}} \|T_n(x) w(x)\|_{L^{p-\varepsilon}} \le c\|T_n(x)\|_{\mathcal{L}_w^{p),\theta}}$$

და, მაშასადამე,

$$|a_0(T)| \le cn^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|T_n(t)\|_{\mathcal{L}_w^{p),\theta}} \qquad (3.5.7)$$

და, ბოლოს, (3.5.5) და (3.5.7)-დან ვღებულობთ სასურველ უტოლობას.

§3.6 პირდაპირი და შებრუნებული თეორემები $\mathcal{L}_w^{p),\theta}$ სივრცეში

ამ პარაგრაფში მოყვანილი იქნება ფუნქციათა კონსტრუქციული თეორიის პირდაპირი და შებრუნებული უტოლობები გრანდ ლებეგის ისეთ წონიან სივრცეებში, როცა წონა w -ს მამრავლის პოზიცია უჭირავს.

თეორემა 3.6.1. (ჯექსონის პირველი უტოლობის ტიპის უტოლობა)ვთქვათ, $1<p<\infty$, $\theta>0$ და $w \in \mathbb{A}_p$. მაშინ ყოველი $f \in \tilde{L}_w^{p),\theta}$ ფუნქციისთვის

$$E_n(f)_{\mathcal{L}_w^{p),\theta}} \leq c\Omega_k\left(f,\frac{1}{n}\right) \qquad (3.6.1)$$

სადაც დადებითი მუდმივი c არ არის დამოკიდებული n −ზე და f −ზე.

თეორემა 3.6.2. (ჯექსონის მეორე უტოლობის ტიპის უტოლობა)ვთქვათ, $1<p<\infty$, $\theta>0, w \in \mathbb{A}_p$ და $f \in \tilde{L}_w^{p),\theta}$. მაშინ ადგილი აქვს შეფასებას

$$E_n(f)_{\mathcal{L}_w^{p),\theta}} \leq \frac{c}{(n+1)^r}\Omega\left(f^{(r)},\frac{1}{n}\right)_{\mathcal{L}_w^{p),\theta}} \qquad (3.6.2)$$

სადაც დადებითი მუდმივი c არ არის დამოკიდებული n −ზე და f −ზე.

ამ შემთხვევაშიც დამტკიცება $L_w^{p),\theta}$ სივრცის ანალოგიურია. მხოლოდ იმ შემთხვევაში თეორემები ჩამოყალიბებული გვქონდა k −ური რიგის განზოგადებული სიგლუვის მოდულისთვის და დამტკიცება გადმოცემის სიმარტივის გამო მოყვანილი იყო პირველი რიგის სიგლუვის მოდულისთვის. მიღებულ (3.6.1) და (3.6.2) უტოლობებზე დაყრდნობით მაღალი რიგის სიგლუვის მოდულისთვის შესაბამისი შეფასებების მისაღები ინდუქციური პროცედურა მოცემულია ნაშრომში (F.Dai,Jackson-type inequality for doubling weights on the sphere, Constr. Approx. 24(2006), N$_0$.1, 91-112). მართალია, აღნიშნულ შრომაში ზემოხსენებული პროცედურა მოცემულია L^p სივრცეებისთვის, ჩვენი შემთხვევისთვისაც სურათი იგივეა.

ჩვენ ფოკუსირებას მოვახდენთ ისეთი შებრუნებული უტოლობის დამტკიცებაზე, როცა უტოლობის სხვადახვა მხარეს სივრცის მაჩვენებლები სხვადასხაა. განსხვავებით $L_w^{p),\theta}$ სივრცისგან, ამ შემთხვევაში ეს შესაძლებელი ხდება $\mathcal{L}_w^{p),\theta}$ სივრცეში დამტკიცებული შესაბამისი ფორმის ბერშტეინ-ზიგმუნდისა და ნიკოლსკის უტოლობების ტიპის უტოლობებზე დაყრდნობით.

თეორემა 3.6.3. ვთქვათ $1<p<\infty, \theta>0, \theta_1=\theta\frac{p}{q}$, $w \in \mathbb{A}_{p,q}$. თუ $f \in \tilde{\mathcal{L}}_w^{p),\theta}$ ფუნქციისთვის შესრულებულია პირობა

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}-1} E_\nu(f)_{\mathcal{L}_w^{p),\theta}} < \infty \qquad (3.6.3)$$

მაშინ ადგილი აქვს უტოლობებს:

$$E_n(f)_{\mathcal{L}_w^{q),\theta_1}} \le c\left(n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} E_n(f)_{\mathcal{L}_w^{p),\theta}} + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}-1} E_\nu(f)_{\mathcal{L}_w^{p),\theta}}\right) \qquad (3.6.4)$$

და

$$\Omega_k\left(f,\frac{1}{n}\right)_{\mathcal{L}_w^{q),\theta_1}} \le c\left(\frac{1}{n^{2k}}\sum_{\nu=0}^{n}(\nu+1)^{\left(2k+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)-1} E_\nu(f)_{\mathcal{L}_w^{p),\theta}} + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}-1} E_\nu(f)_{\mathcal{L}_w^{p),\theta}}\right) \quad (3.6.5)$$

სადაც მუდმივი c არ არის დამოკიდებული n −ზე და f −ზე.

დამტკიცება. ვთქვათ$2^m \le n < 2^{m+1}$. შემდგომში $S_n(x,f)$ აღნიშნავს f ფუნქციის ფურიეს n −ურ კერძო ჯამებს მაშინ

$$\|f(x) - S_n(x,f)\|_{\mathcal{L}_w^{q),\theta_1}}$$

$$\le \|S_{2^{m+1}}(x,f) - S_n(x,f)\|_{\mathcal{L}_w^{q),\theta_1}} + \sum_{\nu=m+2}^{\infty} \|S_{2^{\nu+1}}(x,f) - S_{2^\nu}(x,f)\|_{\mathcal{L}_w^{q),\theta_1}} \quad (3.6.6)$$

გამოვიყენოთ ნიკოლსკის უტოლობის ტიპის უტოლობა $\mathcal{L}_w^{p),\theta}$ სივრცებისთვის (იხ. თეორემა 3.5.2), მაშინ მივიღებთ

$$E_n(f)_{\mathcal{L}_w^{q),\theta_1}} \le c\left(2^{m\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} E_n(f)_{\mathcal{L}_w^{p),\theta}} + \sum_{\nu=m+2}^{\infty} 2^{\nu\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} E_{2^\nu}(f)_{\mathcal{L}_w^{p),\theta}}\right) \quad (3.6.7)$$

ამ უკანასკნელი უტოლობიდან კი გამომდინარეობს (3.6.4).

იმისათვის რომ დავამტკიცოთ (3.6.5) უტოლობა, ჯერ ვაჩვენოთ, რომ თუ $g \in W_{p),\theta,w}^{(2k)}$, მაშინ

$$\Omega_k(g,\delta)_{\mathcal{L}_w^{q),\theta_1}} \le c\delta^{2k}\|g^{2k}\|_{\mathcal{L}_w^{q),\theta_1}} \qquad (3.6.8)$$

ამისათვის საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ ყოველი k −სთვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$\Omega_k(g,\delta)_{\mathcal{L}_w^{q),\theta_1}} \le c\delta^2\Omega_{k-1}(g'',\delta)_{L^{q),\theta_1}}$$

ვთქვათ,

$$\beta(x) = \prod_{i=2}^{k}\left(I - A_{h_i}\right)g(x)$$

მაშინ

$$\prod_{i=1}^{k}(I-m_{h_i})g(x)=\beta(x)-\frac{1}{2h_i}\int_{-h_i}^{h_i}\beta(x+t)dt=\frac{1}{4h_i}\int_{-h_i}^{h_i}[\beta(x+t)-2\beta(x)+\beta(x-t)]dt$$
$$=\frac{1}{4h_i}\int_0^{h_i}\int_0^{t}\int_{-y}^{y}\beta(\cdot+z)dzdydt$$

მინკოვსკის უტოლობის ტიპის უტოლობით და ჰარდი-ლიტლვუდის ოპერატორის შემოსაზღვრულობის გამო $\mathcal{L}_w^{q),\theta}$ სივრცეში მივიღებთ, რომ

$$\left\|\prod_{i=1}^{k}(I-m_{h_i})g(x)\right\|_{L_w^{q),\theta}}\le\frac{c}{h_i}\int_0^{h_i}\int_0^{t}\left\|\int_{-y}^{y}\beta(x+z)dz\right\|_{\mathcal{L}_w^{q),\theta}}dy\,dt$$
$$\le\frac{c}{h_i}\int_0^{h_i}\int_0^{t}2y\left\|\frac{1}{2y}\int_{-y}^{y}\beta''(x+z)dz\right\|_{\mathcal{L}_w^{q),\theta}}dy\,dt\le\frac{c}{h_i}\int_0^{h_i}\int_0^{t}\|A_y\beta''\|_{\mathcal{L}_w^{q),\theta_1}}dy\,dt$$
$$\le ch^2\|\beta''\|_{\mathcal{L}_w^{q),\theta_1}}$$

აქედან გვექნება

$$\Omega_k(g,\delta)_{\mathcal{L}_w^{q),\theta_1}}\le c\delta^2\sup_{\substack{0<h_i<\delta\\2<i<k}}\left\|\prod_{i=1}^{k}(I-A_{h_i})g''\right\|_{\mathcal{L}_w^{q),\theta_1}}=c\delta^2\Omega_{k-1}(g'',\delta)_{\mathcal{L}_w^{q),\theta_1}}$$

შევუდგეთ (3.6.5) უტოლობის დამტკიცებას

ვთქვათ, $2^m\le n<2^{m+1}$ და $\delta=\frac{1}{n}$. მაშინ

$$\Omega_k(g,\delta)_{\mathcal{L}_w^{q),\theta_1}}\le\Omega_k\left(\left(f-S_{2^{m+1}}(f)\right),\delta\right)_{\mathcal{L}_w^{q),\theta_1}}+\Omega_k(S_{2^{m+1}},\delta)_{\mathcal{L}_w^{q),\theta_1}}\qquad(3.6.9)$$

დამტკიცებული (3.6.4) უტოლობის ძალით, გვაქვს

$$\Omega_k\left(\left(f-S_{2^{m+1}}(f)\right),\delta\right)_{\mathcal{L}_w^{q),\theta_1}}\le c\|f-S_n(f)\|_{\mathcal{L}_w^{q),\theta}}$$
$$\le c\left(n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}E_n(f)_{\mathcal{L}_w^{q),\theta}}+\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}-1}E_\nu(f)_{\mathcal{L}_w^{p),\theta}}\right)\qquad(3.6.10)$$

შევაფასოთ $\Omega_k(S_{2^{m+1}},\delta)_{\mathcal{L}_w^{q),\theta_1}}$. გამოვიყენოთ (3.6.8) უტოლობა. გვექნება

$$\Omega_k(f,\delta)_{\mathcal{L}_w^{q),\theta_1}}\le c\frac{1}{n^{2k}}\left\|S_{2^{m+1}}^{(2k)}(f)\right\|_{\mathcal{L}_w^{q),\theta_1}}\qquad(3.6.11)$$

მეორეს მხრივ

$$\left\|S_{2^{m+1}}^{(2k)}(f)\right\|_{\mathcal{L}_w^{q),\theta_1}} \leq \left\|S_1^{(2k)}(f)-S_0^{(2k)}(f)\right\|_{\mathcal{L}_w^{q),\theta_1}}+\sum_{i=0}^{m}\left\|S_{2^{i+1}}^{(2k)}(f)-S_{2^i}^{(2k)}(f)\right\|_{\mathcal{L}_w^{q),\theta_1}}$$

რაც შეეხება წინა უტოლობის პირველ შესაკრებს ბერშტეინ-ზიგმუნდისა და ნიკოლსკის უტოლობების ტიპის უტოლობების ძალით გვექნება

$$\left\|S_1^{(2k)}(f)-S_0^{(2k)}(f)\right\|_{L_w^{q),\theta_1}} \leq \|S_1(f)-S_0(f)\|_{L_w^{p),\theta}} \leq cE_0(f)_{L_w^{p),\theta}} \qquad (3.6.12)$$

მეორე შესაკრებშიც გამოვიყენოთ იგივე უტოლობები, მაშინ მივიღებთ

$$\sum_{i=0}^{m}\left\|S_{2^{i+1}}^{(2k)}(f)-S_{2^i}^{(2k)}(f)\right\|_{\mathcal{L}_w^{q),\theta_1}} \leq c\sum_{i=0}^{m}2^{i\left(2k+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\|S_{2^{i+1}}(f)-S_{2^i}(f)\|_{\mathcal{L}_w^{p),\theta}}$$
$$\leq c\sum_{i=0}^{m}2^{i\left(2k+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}E_{2^i}(f)_{\mathcal{L}_w^{p),\theta}} \qquad (3.6.13)$$

და, ბოლოს, (3.6.9),(3.6.10),(3.6.12) და (3.6.13) უტოლობების ძალით დავასკვნით, რომ მართებულია (3.6.5) უტოლობა.

შენიშვნა. ჩვენ გამოვიყენეთ ჰარდი ლიტლვუდის მაქსიმალური ოპერატორის შემოსაზღვრულობა $L_w^{q),\theta}$ სივრცეში, მაშინ როცა $w\in\mathbb{A}_{p,q}$. საქმე იმაშია, რომ ჰელდერის უტოლობის გამოყენებით ადვილად დავრწმუნდებით, რომ თუ $w\in\mathbb{A}_{p,q}$, მაშინ $w\in\mathbb{A}_q$. მართლაც $\mathbb{A}_{p,q}$პირობის ძალით

$$\left(\frac{1}{|I|}\int_I w^q(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{|I|}\int_I w^{-p'}(x)dx\right)^{\frac{1}{p'}}<\infty$$

მეორეს მხრივ,

$$\left(\frac{1}{|I|}\int_I w^q(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{|I|}\int_I w^{-q'}(x)dx\right)^{\frac{1}{q'}}$$
$$\leq\left(\frac{1}{|I|}\int_I w^q(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{|I|}\right)^{\frac{1}{q'}}\left(\int_I w^{-p'}(x)dx\right)^{\frac{1}{p'}}|I|^{\frac{1}{q'}-\frac{1}{p'}}$$
$$\leq\left(\frac{1}{|I|}\int_I w^q(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{|I|}\int_I w^{-p'}(x)dx\right)^{\frac{1}{p'}}<c$$

§3.7 ტრიგონომეტრიული პოლინომებით აპროქსიმაციის შესახებ ცვლადმაჩვენებლიან გრანდ ლებეგის $L^{p(.),\theta}$ სივრცეებში

ვთქვათ $p \in \mathbb{P} \cap \mathbb{P}^{log}$, ცვლადმაჩვენებლიანი გრანდ ლებეგის სივრცე $L^{p(.),\theta}, \theta > 0$ და $\tilde{L}^{p(.),\theta}$ მისი ის ქვესივრცე, რომელიც წარმოადგენს $L^{p(.)}$ სივრცის ჩაკეტვას $L^{p(.),\theta}$ სივრცის ნორმით განსაზღვრული გვქონდა §1.4-ში. ამ პარაგრაფში ჩვენ აღვნიშნავთ, რომ $\tilde{L}^{p(.),\theta}$ სივრცისათვის მართებულია 3.7.1. ტიპის თეორემები. ამ შედეგების დამტკიცება ეყრდნობა ბერნშტეინ-ზიგმუნდის უტოლობის ტიპის უტოლობას წილადური წარმოებულისათვის $L^{p(.),\theta}$ სივრცეში.

თეორემა 3.7.1. ვთქვათ, $p \in \mathbb{P} \cap \mathbb{P}^{log}$. მაშინ ყოველი T_n ტრიგონომეტრიული პოლინომისათვის და დადებითი α რიცხვისათვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$\left\| T_n^{(\alpha)} \right\|_{p(.),\theta} \leq cn^{\alpha} \|T_n\|_{p(.),\theta}$$

სადაც c მუდმივი არ არის დამოკიდებული T_n-ზე და n-ზე.

ამ თეორემის დამტკიცება სრულიად ანალოგიურია, მაგალითად, თეორემა 3.5.1-ის დამტკიცებისა. $\tilde{L}^{p(.),\theta}$ სივრცეში ადგილი აქვს წინა პარაგრაფებში დამტკიცებული პირდაპირი და შებრუნებული თეორემების ანალოგიურ თეორემებს. დეტალების გადმოცემისგან თავს შევიკავებთ თუნდაც ნაშრომის მოცულობის შეზღუდვიდან გამომდინარე.

თავი 4

ტრიგონომეტრიული პოლინომებით ორი ცვლადის ფუნქციის „კუთხით“ მიახლოება $L_w^{p),\theta}(\mathbb{T}^2)$ სივრცეში

§4.1 განზოგადებული შერეული სიგლუვის მოდული და კუთხით საუკეთესო მიახლოების ცნებები

შემოვიღოთ ზოგიერთი აღნიშვნა. ორი ცვლადის ყველა იმ ტრიგონომეტრიული პოლინომების სიმრავლე, რომელთა რიგი არ აღემატება m-ს x ცვლადის მიმართ (შესაბამისად არ აღემატება n-ს y ცვლადი მიმართ) აღვნიშნოთ $\mathcal{T}_{m,0}$-ით (შესაბამისად $\mathcal{T}_{0,n}$-ით). $\mathcal{T}_{m,n}$-ით აღვნიშნოთ ყველა იმ ტრიგონომეტრიული პოლინომების სიმრავლე, რომლის რიგი x ცვლადის მიმართ არ აღემატება m-ს, ხოლო y ცვლადის მიმართ n-ს. $f \in \tilde{L}_w^{p),\theta}(\mathbb{T}^2)$ ფუნქციის ტრიგონომეტრიული პოლინომებით კერძო საუკეთესო მიახლოებები განისაზღვრება, როგორც

$$\mathcal{E}_{m,0}(f)_{L_w^{p),\theta}} = \inf\left\{\|f-T\|_{L_w^{p),\theta}} : T \in \mathcal{T}_{m,0}\right\}, \qquad (4.1.1)$$

$$\mathcal{E}_{0,n}(f)_{L_w^{p),\theta}} = \inf\left\{\|f-S\|_{L_w^{p),\theta}} : S \in \mathcal{T}_{0,n}\right\}, \qquad (4.1.2)$$

სადაც $1 < p < \infty, \theta > 0, w \in A_p(\mathbb{T}^2, \mathbb{J})$.

ტრიგონომეტრიული პოლინომებით „კუთხური“ საუკეთესო მიახლოება განსაზღვრულია როგორც

$$\mathcal{E}_{m,n}(f)_{L_w^{p),\theta}} = \inf\left\{\|f-T-S\|_{L_w^{p),\theta}} : T \in \mathcal{T}_{m,0}, S \in \mathcal{T}_{0,n}\right\}, \qquad (4.1.3)$$

განსაზღვრა. ვიტყვით, რომ ორი ცვლადის ზომადი არაუარყოფითი w ფუნქცია 2π პერიოდული თითოეული ცვლადის მიმართ განსაზღვრული $\mathbb{T}^2$-ზე ეკუთვნის $A_p(\mathbb{T}^2, \mathbb{J})$-ს, თუ შესრულებულია პირობა

$$sup\left(\frac{1}{|\mathbb{J}|}\int_{\mathbb{J}} w(x,y)\,dxdy\right)\left(\frac{1}{|\mathbb{J}|}\int_{\mathbb{J}} w^{1-p'}(x,y)\,dxdy\right)^{p-1} < \infty$$

სადაც sup აიღება ყველა იმ მართკუთხედის მიმართ, რომელთა გვერდები პარალელურია კოორდინატთა ღერძების და სიგრძეები არ აღემატება 2π-ს.

ასეთი ფუნქციაა მაგ.: $w(x,y) = \left(\sqrt{sin^2\frac{x}{2} + sin^2\frac{y}{2}}\right)^{\alpha}, -1 < \alpha < p-1.$

მოვიგონოთ, რომ $\widetilde{L}_w^{p),\theta}(\mathbb{T}^2)$-ით აღნიშნულია იმ f ფუნქციების ქვესიმრავლე $L_w^{p),\theta}(\mathbb{T}^2)$-დან, რომელთათვისაც

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{\theta} \int_{\mathbb{T}^2} |f(x,y)|^{p-\varepsilon} w(x,y)dxdy = 0$$

$\widetilde{L}_w^{p),\theta}(\mathbb{T}^2)$ ქვესივრცე წარმოადგენს $L_w^p(\mathbb{T}^2)$ სივრცის ჩაკეტვას $L_w^{p),\theta}(\mathbb{T}^2)$ სივრცის ნორმით.

განვიხილოთ ძლიერი და კერძო მაქსიმალური ფუნქციები

$$Mf(x,y) = \sup_{\substack{0<h\le\pi \\ 0<k\le\pi}} \frac{1}{hk} \int_{x-h}^{x+h} \int_{y-k}^{y+k} f(t,\tau)dt\,d\tau$$

$$M_x f(x,y) = \sup_{0<h\le\pi} \frac{1}{h} \int_{x-h}^{x+h} f(t,y)dt$$

$$M_y f(x,y) = \sup_{0<k\le\pi} \frac{1}{k} \int_{y-k}^{y+k} f(x,\tau)d\tau$$

ცნობილია [19], რომ როცა $w \in A_p(\mathbb{T}^2, \mathbb{J})$, მაშინ ძლიერი მაქსიმალური ფუნქცია შემოსაზღვრულია $L_w^{p),\theta}(\mathbb{T}^2)$ სივრცეში.

ლებეგის განუსაზღვრელი ინტეგრალის დიფერენცირების თეორემიდან და $w \in A_p(\mathbb{T}^2, \mathbb{J})$ პირობიდან გამომდინარეობს, რომ $w \in A_p(\mathbb{T})$, x ცვლადის მიმართ თანაბრად y-ის მიმართ და აგრეთვე, y ცვლადის მიმართ თანაბრად x ცვლადის მიმართ, ამიტომ $M_x f(x,y)$ და $M_y f(x,y)$ ოპერატორები შემოსაზღვრული ოპერატორებია $L_w^{p),\theta}(\mathbb{T}^2)$ სივრცეში.

ვთქვათ,$1 < p < \infty, w \in A_p(\mathbb{T}^2, \mathbb{J}), f \in \widetilde{L}_w^{p),\theta}(\mathbb{T}^2), h > 0, k > 0$. შემოვიღოთ შემდეგი სახის საშუალოები

$$\Delta_{h,0} f(x,y) = \frac{1}{h} \int_{x-h}^{x+h} \big(f(x,y) - f(t,\tau)\big)dt \qquad (4.1.4)$$

$$\Delta_{0,k} f(x,y) = \frac{1}{k} \int_{y-k}^{y+k} \big(f(x,y) - f(t,\tau)\big)d\tau \qquad (4.1.5)$$

$$\Delta_{h,k} f(x,y) = \Delta_{h,0}\big(\Delta_{0,k} f\big)(x,y) = \frac{1}{hk} \int_{x-h}^{x+h} \int_{y-k}^{y+k} \big(f(x,y) - f(t,\tau)\big)dt\,d\tau \qquad (4.1.6)$$

ძლიერი და კერძო მაქსიმალური ფუნქციების შემოსაზღვრულობის გამო $L_w^{p),\theta}$ სივრცეში, თითოეული ზემოთ მოყვანილი საშუალო შემოსაზღვრული იქნება $L_w^{p),\theta}$ სივრცეში თანაბრად h-ისა და k-ს მიმართ.

შერეული განზოგადებული სიგლუვის მოდული განისაზღვრება როგორც

$$\Omega(f,\delta_1,\delta_2)_{L_w^{p),\theta}} = \sup_{\substack{0<h\le\delta_1\\ 0<k\le\delta_2}} \left\|\Delta_{h,k}f\right\|_{L_w^{p),\theta}} \qquad (4.1.7)$$

ცხადია,

$$\Omega(f,\delta_1,\delta_2)_{L_w^{p),\theta}} \le c\|f\|_{L_w^{p),\theta}},$$

სადაც დადებითი c მუდმივი არ არის დამოკიდებული f-ზე.

ვთქვათ,

$$f(x,y)\sim \sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty} A_{k_1,k_2}(x,y) \qquad (4.1.8)$$

არის $f \in \tilde{L}_w^{p),\theta}$ კლასის ფუნქციის ორჯერადი ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივი (4.1.8) ჩანაწერში ვგულისხმობთ, რომ

$$A_{k_1,k_2}(x,y) = \mu_{k_1,k_2}\big(a_{k_1,k_2}\cos k_1x\cos k_2y + b_{k_1,k_2}\sin k_1x\cos k_2y + c_{k_1,k_2}\cos k_1x\sin k_2y + d_{k_1,k_2}\sin k_1x\sin k_2y\big),$$

$$\mu_{k_1,k_2} = \begin{cases} \frac{1}{4}, k_1 = k_2 = 0 \\ \frac{1}{2}, k_1 = 0, k_2 > 0 \text{ ან } k_1 > 0. k_2 = 0 \\ 1, k_1 > 0, k_2 > 0 \end{cases}$$

ქვემოთ განსაზღვრულია (4.1.8) მწკრივის კერძო ჯამები

$$S_{m,0}(f)(x,y) \doteq \sum_{k_1=0}^{m}\sum_{k_2=0}^{\infty} A_{k_1,k_2}(x,y)\,, \qquad S_{0,n}(f)(x,y) \doteq \sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{n} A_{k_1,k_2}(x,y)$$

და

$$S_{m,n}(f)(x,y) = S_{m,0}\left(S_{0,n}(f)\right)(x,y) = \sum_{k_1=0}^{m}\sum_{k_2=0}^{n} A_{k_1,k_2}(x,y).$$

გვაქვს

$$S_{m,0}(f)(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t,y)D_m(t)dt\,, S_{0,n}(f)(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x,y+\tau)D_n(\tau)d\tau,$$

$$S_{m,n}(f)(x,y) = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t,y+\tau)D_m(t)D_n(\tau)dtd\tau$$

სადაც

$$D_j(t) = \frac{\left(\sin\left(j+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\frac{t}{2}} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{j} \cos kt.$$

არის დირიხლეს გული.

$w \in A_p(\mathbb{T}^2, \mathbb{J})$ წონითი ფუნქციის ზემოხსენებული თვისებიდან და $\tilde{L}_w^{p),\theta}(\mathbb{T}^2)$ კლასის ფუნქციის ფურიეს მწკრივის კერძო ჯამების ერთობლივ შემოსაზღვრულობიდან $L_w^{p),\theta}$ სივრცის ნორმით ვასკვნით, რომ $S_{m,0}, S_{0,n}, S_{m,n}$ ოპერატორები ერთობლივ შემოსაზღვრულია $L_w^{p),\theta}(\mathbb{T}^2, \mathbb{J})$ სივრცის ნორმით. ანალოგიური თვისება აქვთ (4.1.8) მწკრივის ჩეზაროსა და ვალე-პუსენის საშუალოებს, რომელთა განსაზღვრაც ქვემოთ არის მოტანილი:

ჩეზაროს საშუალოები:

$$\sigma_{m,0}(f)(x,y) \doteq \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m} S_{k,0}(f)(x,y)\,, \sigma_{0,n}(f)(x,y) = \frac{1}{n+1}\sum_{l=0}^{n} S_{0,l}(f)(x,y)$$

$$\sigma_{m,n}(f)(x,y) \doteq \sigma_{m,0}\left(\sigma_{0,n}(f)\right)(x,y) = \frac{1}{(m+1)(n+1)}\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n} S_{k,l}(f)(x,y)$$

და ვალე-პუსენის საშუალოები:

$$V_{m,0}(f)(x,y) \doteq \frac{1}{m+1}\sum_{k=m}^{2m-1} S_{k,0}(f)(x,y)\,, V_{0,n}(f)(x,y) = \frac{1}{n+1}\sum_{l=n}^{2n-1} S_{0,l}(f)(x,y)$$

$$V_{m,n}(f)(x,y) \doteq V_{m,0}\left(V_{0,n}(f)\right)(x,y) = \frac{1}{(m+1)(n+1)}\sum_{k=m}^{2m-1}\sum_{l=n}^{2n-1} S_{k,l}(f)(x,y)$$

შევნიშნოთ, რომ ჩეზაროს საშუალოების ერთობლივ შემოსაზღვრულობა $L_w^{p),\theta}(\mathbb{T}^2)$ სივრცეში გამომდინარეობს აგრეთვე მათი წერტილოვანი შეფასებიდან (იხ.[52], გვ. 246)

$$\left|\sigma_{m,n}(f)(x,y)\right| \le c\left(M(f)(x,y) + M_1\big(M_2(f)\big)(x,y) + M_2\big(M_1(f)\big)(x,y)\right)$$

თითქმის ყველა $(x, y) \in \mathbb{T}^2$ და ძლიერი და კერძო მაქსიმალური ფუნქციების შემოსაზღვრულობიდან $L_w^{p),\theta}$ სივრცეში.

ზემოთ $\doteq$ ნიშნავს ტოლობას თითქმის ყველგან.

§4.2 ბერნშტეინის ტიპის უტოლობები ორი ცვლადის ტრიგონომეტრიული პოლინომებისათვის $L_w^{p),\theta}(\mathbb{T}^2)$ სივრცეში

შევნიშნოთ, რომ ბერნშტეინის უტოლობის ტიპის უტოლობები მთელი დადებითი რიგის წარმოებულებისათვის კლასიკურ ლებეგის სივრცეებში ორწონიანი დასმით დამტკიცებულია ა.გუვენისა და ვ.კოკილაშვილის სტატიაში, რაც ასახულია [20] მონოგრაფიაში. ქვემოთ გამოყენებული გვაქვს იგივე ხერხი $L_w^{p),\theta}$ სივრცეებში.

ვთქვათ, $T_1 \in \mathcal{T}_{m,0}, T_2 \in \mathcal{T}_{0,n}, T_3 \in \mathcal{T}_{m,n}$. მაშინ გვექნება

$$T_1(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T_1(t,y)D_m(t-x)dt\,, T_2(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T_2(x,\tau)D_n(\tau-y)d\tau$$

$$T_3(x,y) = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T_3(t,\tau)D_m(t-x)D_n(\tau-y)dtd\tau$$

გაწარმოების შედეგად მივიღებთ:

$$\frac{\partial}{\partial x}T_1(x,y) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T_1(x+t,y)D_m'(t)dt\,, \frac{\partial}{\partial y}T_2(x,y) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T_2(x,y+\tau)D_n'(\tau)d\tau,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}T_3(x,y) = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T_3(x+t,y+\tau)D_m'(t)D_n'(\tau)dtd\tau$$

თეორემა 4.2.1. ვთქვათ,$1 < p < \infty, \theta > 0,, w \in A_p(\mathbb{T}^2, \mathbb{J})$. მაშინ ნებისმიერი $k, l \in \mathbb{N}$-ისათვის ადგილი აქვს უტოლობებს

$$\left\|\frac{\partial^{(k)}}{\partial x^k}T_1\right\|_{L_w^{p),\theta}(\mathbb{T}^2)} \le c_1 m^k \|T_1\|_{L_w^{p),\theta}(\mathbb{T}^2)},$$

$$\left\|\frac{\partial^{(l)}}{\partial y^l}T_2\right\|_{L_w^{p),\theta}(\mathbb{T}^2)} \le c_2 n^l \|T_2\|_{L_w^{p),\theta}(\mathbb{T}^2)}, \quad \left\|\frac{\partial^{(k+l)}}{\partial x^k \partial y^l}T_3\right\|_{L_w^{p),\theta}(\mathbb{T}^2)} \le c_1 m^k n^l \|T_3\|_{L_w^{p),\theta}(\mathbb{T}^2)} \qquad (4.2.1)$$

სადაც დადებითი მუდმივები c_1, c_2 და c არ არის დამოკიდებული ტრიგონომეტრიულ პოლინომებზე.

დამტკიცება. მოვიყვანოთ (4.2.1)-ის პირველი და მესამე უტოლობა. მეორე უტოლობის დამტკიცება ანალოგიურია.

საკმარისია დამტკიცება მოვიყვანოთ $k = 1$ და $l = 1$-ის შემთხვევაში.

$$\frac{\partial}{\partial x}T_1(x,y) = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T_1(x+t) m \sin mt \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{m-1}\frac{m-k}{m}\cos kt\right)dt$$
$$= -\frac{2m}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T_1(x+t,y)\sin mt\, k_{m-1}(t)dt$$

ანალოგიურად

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}T_3(x,y) = \frac{4mn}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T_3(x+t, y+\tau)\sin mt \sin nt\, k_{m-1}(t)k_{n-1}(t)dtd\tau$$

სადაც K_j აღნიშნავს ფეიერის გულს.

აქედან

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}T_1(x,y)\right| \le 2m\sigma_{m-1,0}(|T_1|)(x,y),$$

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}T_3(x,y)\right| \le 4mn\sigma_{m-1,n-1}(|T_3|)(x,y),$$

ჩეზაროს საშუალოების ერთობლივ შემოსაზღვრულობიდან $L_w^{p),\theta}$ სივრცის ნორმით უკანასკნელი უტოლობებიდან დავასკვნით (4.2.1) უტოლობების მართებულობას.

ლემა 4.2.1. ვთქვათ,$1 < p < \infty, w \in A_p(\mathbb{T}^2, \mathbb{J}), f \in \tilde{L}_w^{p),\theta}(\mathbb{T}^2), k, l \in \mathbb{N}$. მაშინ ადგილი აქვს უტოლობას

$$\left\|\frac{\partial^{(k+l)}}{\partial x^k \partial y^l}h_{ij}(f)\right\|_{L_w^{p),\theta}} \le c2^{ik+jl}\mathcal{E}_{2^{i-1},2^{j-1}}(f)_{L_w^{p),\theta}},$$

სადაც

$$h_{ij}(f) \coloneqq V_{2^i,2^j}(f) - V_{2^i,2^{j-1}}(f) - V_{2^{i-1},2^j}(f) + V_{2^{i-1},2^{j-1}}(f).$$

დამტკიცება. ცხადია, რომ $h_{ij}(f) \in \mathcal{T}_{2^{i+1}-1,2^{j+1}-1}$. გვაქვს

$$\begin{aligned}\left\|h_{ij}(f)\right\|_{L_w^{p),\theta}} &\leq \left\|V_{2^i,2^j}(f)-f\right\|_{L_w^{p),\theta}}+\left\|f-V_{2^i,2^{j-1}}(f)\right\|_{L_w^{p),\theta}}+\left\|f-V_{2^{i-1},2^j}(f)\right\| \\ &+\left\|f+V_{2^{i-1},2^{j-1}}(f)\right\| \\ &\leq c\left(\mathcal{E}_{2^i,2^j}(f)_{L_w^{p),\theta}}+\mathcal{E}_{2^i,2^{j-1}}(f)+\mathcal{E}_{2^{i-1},2^j}(f)+\mathcal{E}_{2^{i-1},2^{j-1}}(f)\right) \leq c\mathcal{E}_{2^{i-1},2^{j-1}}(f)_{L_w^{p),\theta}}\end{aligned}$$

თეორემა 4.2.1-ის და ზემოთ მიღებული უტოლობის გამოყენებით მივიღებთ, რომ

$$\left\|\frac{\partial^{(k+l)}}{\partial x^k \partial y^l} h_{ij}(f)\right\|_{L_w^{p),\theta}} \leq c2^{ik+jl}\left\|h_{ij}(f)\right\|_{L_w^{p),\theta}} \leq c2^{ik+jl}\mathcal{E}_{2^{i-1},2^{j-1}}(f)_{L_w^{p),\theta}}$$

სრულიად ანალოგიურად მტკიცდება შემდეგი ლემები:

ლემა 4.2.2. ვთქვათ,$1<p<\infty, w \in A_p(\mathbb{T}^2,\mathbb{J}), f \in \tilde{L}_w^{p),\theta}(\mathbb{T}^2), k \in \mathbb{N}$.

მაშინ ადგილი აქვს უტოლობას

$$\left\|\frac{\partial^k}{\partial x^k}\varphi_{ij}(f)\right\|_{L_w^{p),\theta}} \leq c2^{ik+}\mathcal{E}_{2^{i-1},2^j}(f)_{L_w^{p),\theta}},$$

სადაც

$$\varphi_{ij}(f) \coloneqq V_{2^i,0}\left(f-V_{0,2^j}(f)\right)-V_{2^{i-1},0}(f)\left(f-V_{0,2^j}(f)\right)$$

და c მუდმივი არ არის დამოკიდებული f-ზე, i და k-ზე.

ლემა 4.2.3. ვთქვათ, $1<p<\infty, w \in A_p(\mathbb{T}^2,\mathbb{J}), f \in \tilde{L}_w^{p),\theta}(\mathbb{T}^2), l \in \mathbb{N}$.

მაშინ ადგილი აქვს უტოლობას

$$\left\|\frac{\partial^l}{\partial y^l}\psi_{ij}(f)\right\|_{L_w^{p),\theta}} \leq c2^{jl}\mathcal{E}_{2^i,2^{j-1}}(f)_{L_w^{p),\theta}},$$

სადაც

$$\psi_{ij}(f) \coloneqq V_{0,2^j}\left(f-V_{2^i,0}(f)\right)-V_{0,2^{j-1}}(f)\left(f-V_{2^i,0}(f)\right)$$

§4.3 შერეული K-ფუნქციონალის ორმხრივი შეფასებები. ჯექსონის ტიპის პირდაპირი თეორემა ტრიგონომეტრიული პოლინომებით „კუთხური“ მიახლოებისათვის

ამ პარაგრაფში, როგორც ადრე, ვგულისხმობთ, რომ $1<p<\infty, \theta>0$ და $w \in A_p(\mathbb{T}^2,\mathbb{J})$ შემოვიღოთ კლასები

$$W^{2,2}_{p),\theta w}=\left\{f\in L^{p),\theta}_w:\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}\in L^{p),\theta}_w(\mathbb{T}^2)\right\},$$

$$W^{2,0}_{p),\theta w}=\left\{f\in L^{p),\theta}_w:\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\in L^{p),\theta}_w(\mathbb{T}^2)\right\},$$

$$W^{0,2}_{p),\theta w}=\left\{f\in L^{p),\theta}_w:\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\in L^{p),\theta}_w(\mathbb{T}^2)\right\},$$

შემოვიღოთ შერეული k-ფუნქციონალის ცნება:

$$\begin{aligned}\mathcal{K}(f,t,\tau,w,2,2)\\ :=\inf_{\varphi_1,\varphi_2,\varphi}\Bigg\{\|f-\varphi_1-\varphi_2-\varphi\|_{L^{p),\theta}_w}+t^2\left\|\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}\right\|_{L^{p),\theta}_w}+\tau^2\left\|\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial y^2}\right\|_{L^{p),\theta}_w}\\ +t^2\tau^2\left\|\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2}\right\|_{L^{p),\theta}_w}\Bigg\}\end{aligned}\qquad(4.3.1)$$

სადაც $f\in L^{p),\theta}_w$, ზუსტი ქვედა საზღვარი აიღება ყველა $\varphi_1\in W^{2,0}_{p),\theta w}$, $\varphi_2\in W^{0,2}_{p),\theta w}$, $\varphi\in W^{2,2}_{p),\theta w}$ ფუნქციების მიმართ.

თეორემა 4.3.1. ვთქვათ, $1<p<\infty,\theta>0$ და $w\in A_p(\mathbb{T}^2,\mathbb{J})$. მაშინ მოიძებნება ისეთი c_1 და c_2 მუდმივები, რომ

$$c_1\Omega(f,\delta_1,\delta_2)\le\mathcal{K}(f,\delta_1,\delta_2,p,w,2,2)\le c_2\Omega(f,\delta_1,\delta_2)\qquad(4.3.2)$$

ნებისმიერი $f\in L^{p),\theta}_w$, $\delta_1>0$ და $\delta_2>0$-ისათვის

თეორემის დამტკიცება ეყრდნობა ძლიერი და კერძო მაქსიმალური ფუნქციების შემოსაზღვრულობას $L^{p),\theta}_w$ სივრცეში და, აგრეთვე, შემდეგ ლემას.

ლემა 4.3.1. თეორემა 4.3.1-ის პირობებში ადგილი აქვს უტოლობებს:

$$\Omega(\varphi_1,\delta_1,\cdot)\le c\delta_1^2\left\|\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}\right\|_{L^{p),\theta}_w},\varphi_1\in W^{2,0}_{p),\theta w}\qquad(4.3.3)$$

$$\Omega(\varphi_1,\cdot,\delta_2)\le c\delta_2^2\left\|\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial y^2}\right\|_{L^{p),\theta}_w},\varphi_2\in W^{0,2}_{p),\theta w}\qquad(4.3.4)$$

და

$$\Omega(\varphi,\delta_1,\delta_2)\le c\delta_1^2,\delta_2^2\left\|\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2}\right\|_{L^{p),\theta}_w},\varphi\in W^{2,2}_{p),\theta w}\qquad(4.3.5)$$

სადაც c მუდმივები არ არის დამოკიდებული $\varphi_1, \varphi_2, \varphi$ ფუნქციებზე და $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$ მუდმივებზე.

დამტკიცება. დავამტკიცოთ (4.3.3) . დანარჩენი ორი უტოლობის დამტკიცება ანალოგიურია. გვაქვს:

$$\begin{aligned}
\left\|\Delta_{h,0}\left(\Delta_{0,h_2}\varphi_1\right)\right\|_{L_w^{p),\theta}} &= \left\|\left(I - m_{h_1,0}\right)\left(\mathbb{I} - m_{0,h_2}\right)\varphi_1\right\| = \left\|\left(I - m_{h,0}\right)F\right\| \\
&= \left\|\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\left(F(x,y) - F(x+t,y)\right)dt\right\| = \left\|\int_0^h\int_0^t\int_{-h}^{u} F_x''(x+s,y)ds\,du\,dt\right\| \\
&\le \frac{1}{2h}\int_0^h\int_0^t 2u\left\|\frac{1}{2u}\int_{-u}^{u}\left(F''(x+s,y)ds\right)\right\|dudt \le ch^2\|F''\| \\
&= ch^2\left\|\left[\left(\mathbb{I} - m_{0,h_2}\right)\varphi_1\right]_x''\right\| \le ch^2\left\|\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}\varphi_1\right\|
\end{aligned}$$

თეორემა 4.3.1.-ის დამტკიცება. ჯერ დავამტკიცოთ (4.3.2) ჯაჭვ-უტოლობის მარჯვენა უტოლობა. შემოვიღოთ ინტეგრალური ოპერატორები:

$$K_{\delta_1,0}f(x,y) := \frac{1}{\delta_1^3}\int_0^{\delta_1}\int_0^{t_1}\int_{-u_2}^{u_1} f(x+s_1,y)ds_1\,du_1\,dt_1\,,$$

$$K_{0,\delta_2}f(x,y) := \frac{1}{\delta_2^3}\int_0^{\delta_2}\int_0^{t_2}\int_{-u_2}^{u_2} f(x,y+s_2)ds_2\,du_2\,dt_2\,,$$

$$\begin{aligned}
K_{\delta_1,\delta_2}f(x,y) &= K_{\delta_1,0}\left(K_{0,\delta_2}f\right)(x,y) \\
&= \frac{1}{\delta_1^3\delta_2^3}\int_0^{\delta_1}\int_0^{\delta_2}\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}\int_{-u_1}^{u_1}\int_{-u_2}^{u_2} f(x+s_1,y+s_2)ds_1\,ds_2\,du_1\,du_2\,dt_1\,dt_2\,,
\end{aligned}$$

და ფუნქციები:

$$\varphi_1(x,y) := \left(K_{\delta_1,0}\left(\mathbb{I} - K_{0,\delta_2}\right)f\right)(x,y), \varphi_2(x,y) := \left(K_{0,\delta_2}\left(\mathbb{I} - K_{\delta_1,0}\right)f\right)(x,y),$$

$$\varphi(x,y) := K_{\delta_1,0}\left(K_{0,\delta_2}f\right)(x,y) = K_{\delta_1,\delta_2}f(x,y).$$

გვაქვს

$$\|f-\varphi_1-\varphi_2-\varphi\| = \left\|f-K_{\delta_1,0}f-K_{0,\delta_2}f-K_{\delta_1,\delta_2}f\right\| = \left\|\left(\mathbb{I}-K_{\delta_1,0}\right)\left(\mathbb{I}-K_{0,\delta_2}\right)f\right\|$$

$$= \left\|\left(\mathbb{I}-K_{\delta_1,0}\right)f\right\| = \frac{1}{\delta_1^3}\int_0^{\delta_1}\int_0^{t_1}\int_{-u_2}^{u_1}\left\|\left(F(x,y)-F(x+s_1,y)\right)ds_1du_1dt_1\right\|$$

$$\leq \frac{c}{\delta_1^3}\int_0^{\delta_1}\int_0^{t_1}u_1\left\|\left(\mathbb{I}-m_{u_1,0}\right)F\right\|du_1dt_1 \leq c\sup_{0<u_1\leq\delta_1}\left\|\left(\mathbb{I}-m_{u_1,0}\right)F\right\|\frac{1}{\delta_1^3}\int_0^{\delta_1}\int_0^{t_1}u_1du_1dt_1$$

$$\leq \sup_{0<u_1\leq\delta_1}\left\|\left(\mathbb{I}-m_{u_1,0}\right)\left(\mathbb{I}-K_{0,\delta_2}\right)f\right\| \leq c\sup_{0<u_1\leq\delta_1}\left\|\left(\mathbb{I}-K_{0,\delta_2}\right)G\right\|.$$

იგივე მოსაზრებებით,

$$\left\|\left(\mathbb{I}-K_{0,\delta_2}\right)G\right\| \leq c\sup_{0\leq u_2\leq\delta_2}\left\|\left(\mathbb{I}-m_{0,u_2}\right)G\right\|$$

$$= c\sup_{0\leq u_2\leq\delta_2}\sup_{0\leq u_1\leq\delta_1}\left\|\left(\mathbb{I}-m_{0,u_2}\right)\left(\mathbb{I}-m_{u_1,0}\right)f\right\| \qquad (4.3.6)$$

ამიტომ

$$\|f-\varphi_1-\varphi_2-\varphi\| \leq c\Omega(f,\delta_1,\delta_2)_{L_w^{p),\theta}} \qquad (4.3.7)$$

შემდეგ გვაქვს:

$$\left\|\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}\right\| = \left\|\frac{\partial^2}{\partial x^2}K_{\delta_1,0}\left(\mathbb{I}-K_{0,\delta_2}\right)\right\| = \left\|\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{1}{\delta_1^3}\int_0^{\delta_1}\int_0^{t_1}\int_{-u_2}^{u_1}\left(\left(\mathbb{I}-K_{0,\delta_2}\right)\right)(x+s_1,y)fds_1du_1dt_1\right\|$$

$$= \frac{c}{\delta_1}\left\|\left(\mathbb{I}-K_{\delta_1,0}\right)\left(\mathbb{I}-K_{0,\delta_2}\right)\right\|$$

აქედან (4.3.5) უტოლობის ძალით,

$$\delta_1^2\left\|\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}\right\| \leq c\sup_{\substack{0<u_1\leq\delta_1\\0<u_2\leq\delta_2}}\left\|\left(\mathbb{I}-m_{u_1,0}\right)\left(\mathbb{I}-m_{0,u_2}\right)f\right\| \leq c\Omega(f,\delta_1,\delta_2)_{L_w^{p),\theta}} \qquad (4.3.8)$$

ანალოგიურად,

$$\delta_2^2\left\|\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial y^2}\right\| \leq c\sup_{\substack{0<u_1\leq\delta_1\\0<u_2\leq\delta_2}}\left\|\left(\mathbb{I}-m_{u_1,0}\right)\left(\mathbb{I}-m_{0,u_2}\right)f\right\| \leq c\Omega(f,\delta_1,\delta_2)_{L_w^{p),\theta}} \qquad (4.3.9)$$

აგრეთვე

$$\delta_1^2\delta_2^2\left\|\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2y^2}\right\| = \delta_1^2\delta_2^2\left\|\frac{\partial^4}{\partial x^2y^2}K_{\delta_1,0}\big(K_{0,\delta_2}\big)\right\| = \delta_2^2\left\|\frac{\partial^2}{\partial y^2}\delta_2^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\big(K_{\delta_1,0}f\big)\right\|$$
$$= \delta_2^2\left\|\frac{\partial^2}{\partial y^2}\big(\mathbb{I}-m_{\delta_1,0}\big)\big(\mathbb{I}-m_{0,\delta_2}\big)\right\| \le c\sup_{\substack{0<u_1\le\delta_1\\0<u_2\le\delta_2}}\big\|\big(\mathbb{I}-m_{u_1,0}\big)\big(\mathbb{I}-m_{0,u_2}\big)f\big\|$$
$$\le c\Omega(f,\delta_1,\delta_2)_{L_w^{p),\theta}} \tag{4.3.10}$$

თუ გავითვალისწინებთ (4.3.7), (4.3.8), (4.3.9) და (4.3.10) უტოლობებს, მივიღებთ სასურველ შეფასებას.

შერეული K ფუნქციონალის ქვემოდან შეფასებისთვის ლემა 4.3.1-ის ძალით, მივიღებთ:

$$\Omega(f,\delta_1,\delta_2) \le \Omega(f-\varphi_1-\varphi_2-\varphi,\delta_1,\delta_2)+\Omega(\varphi_1,\delta_1,\delta_2)+\Omega(\varphi_2,\delta_1,\delta_2)+\Omega(\varphi,\delta_1,\delta_2)$$
$$\le c\left(\|f-\varphi_1-\varphi_2-\varphi\|+\delta_1^2\left\|\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}\right\|+\delta_2^2\left\|\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial y^2}\right\|+\delta_1^2\delta_2^2\left\|\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2y^2}\right\|\right).$$

თუ ავიღებთ მარჯვენა მხარის ზუსტ ქვედა საზღვარს φ_1და φ_2 ფუნქციების მიმართ სათანადო კლასებიდან დავასკვნით (4.3.2) ჯაჭვ-უტოლობაში მარცხენა უტოლობის მართებულობასაც.

შედეგი 4.3.1. თეორემა 4.3.1-ის პირობებში გვაქვს

$$\Omega(f,\lambda\delta_1,\eta\delta_2) \le c(1+\lambda)^2(1+\eta)^2\Omega(f,\delta_1,\delta_2), \delta_1,\delta_2>0$$

და

$$\frac{\Omega(f,\delta_1,\delta_2)}{\delta_1\delta_2} \le c\frac{\Omega(f,t_1,\tau)}{t\tau}, 0<t\le\delta_1, 0<\tau\le\delta_2.$$

ლემა 4.3.2. ვთქვათ, $1<p<\infty, \theta>0$ და $w\in A_p$. მაშინ ადგილი აქვს ფავარის ტიპის უტოლობებს:

$$\mathcal{E}_{m,n}(\varphi)_{L_w^{p),\theta}} \le \frac{c}{(m+1)^2(n+1)^2}\left\|\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2}\right\|_{L_w^{p),\theta}}, \varphi\in W_{p),\theta,w}^{2,2}$$

$$\mathcal{E}_{m,n}(\varphi_1)_{L_w^{p),\theta}} \le \frac{c}{(m+1)^2}\left\|\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}\right\|_{L_w^{p),\theta}}, \varphi_1\in W_{p),\theta,w}^{2,0}$$

და

$$\mathcal{E}_{m,n}(\varphi_2)_{L_w^{p),\theta}} \le \frac{c}{(n+1)^2}\left\|\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial y^2}\right\|_{L_w^{p),\theta}}, \varphi_2\in W_{p),\theta,w}^{0,2}$$

სადაც დადებითი მუდმივი c არ არის დამოკიდებული m-ზე და n-ზე.

დამტკიცება. მოვიყვანოთ, მაგალითად, მეორე უტოლობის დამტკიცება.

გვაქვს

$$\|\varphi_1 - S_{m,0}(\varphi_1) - S_{0,n}(\varphi_1) + S_{m,n}(\varphi_1)\|_{L_w^{p),\theta}} = \left\|\sum_{i=m+1}^{\infty}\sum_{j=n+1}^{\infty} A_{i,j}(x,y,\varphi_1)\right\|$$

$$= \left\|\sum_{i=m+1}^{\infty}\sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{i^2} i^2 A_{i,j}(x,y,\varphi_1)\right\|_{L_w^{p),\theta}} \le c\left\|\sum_{i=m+1}^{\infty}\sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{i^2} A_{i,j}\left(x,y,\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}\right)\right\|_{L_w^{p),\theta}}$$

$$= c\left\|\sum_{i=m+1}^{\infty}\sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{i^2}\left(S_{i,j}\left(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}\right) - S_{i,j-1}\left(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}\right) - S_{i-1,j}\left(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left. + S_{i-1,j-1}\left(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}\right)\right)\right\|_{L_w^{p),\theta}}$$

$$= c\left\|\sum_{i=m+1}^{\infty}\left[\frac{1}{(i+1)^2} - \frac{1}{i^2}\right] S_{i,m}\left(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}\right) + \frac{1}{(m+1)^2} S_{m,n}\left(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}\right)\right\|_{L_w^{p),\theta}}$$

$$\le c\sum_{i=m+1}^{\infty}\left[\frac{1}{(i+1)^2} - \frac{1}{i^2}\right]\left\|S_{i,m}\left(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}\right)\right\|_{L_w^{p),\theta}} + \frac{1}{(m+1)^2}\left\|S_{m,n}\left(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}\right)\right\|_{L_w^{p),\theta}}$$

$$\le c\left(\left\|\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}\right\|_{L_w^{p),\theta}}\sum_{i=m+1}^{\infty}\left[\frac{1}{(i+1)^2} - \frac{1}{i^2}\right] + \frac{1}{(m+1)^2}\left\|\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}\right\|_{L_w^{p),\theta}}\right)$$

$$\le \frac{c}{(m+1)^2}\left\|\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}\right\|_{L_w^{p),\theta}}$$

რადგანაც

$$\mathcal{E}_{m,n}(\varphi_1)_{L_w^{p),\theta}} = \mathcal{E}_{m,n}\left(\varphi_1 - S_{m,0}(\varphi_1) - S_{0,n}(\varphi_1) + S_{m,n}(\varphi_1)\right)_{L_w^{p),\theta}}$$
$$\le \|\varphi_1 - S_{m,0}(\varphi_1) - S_{0,n}(\varphi_1) + S_{m,n}(\varphi_1)\|_{L_w^{p),\theta}}$$

ამიტომ ზემოთ დამტკიცებულის გამო გვექნება

$$\mathcal{E}_{m,n}(\varphi_1)_{L_w^{p),\theta}} \le \frac{c}{(m+1)^2}\left\|\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}\right\|_{L_w^{p),\theta}}$$

ანალოგიურად მტკიცდება დანარჩენი ორი უტოლობა.

ამჯერად ჩვენ საშუალება გვაქვს დავამტკიცოთ „კუთხური“ მიახლოების პირდაპირი თეორემა.

თეორემა 4.3.2. ვთქვათ,$1 < p < \infty, \theta > 0$, $w \in A_p(\mathbb{T})$. მაშინ მოიძებნება ისეთი დადებითი c მუდმივი, რომ ნებისმიერი $f \in \tilde{L}_w^{p),\theta}(\mathbb{T}^2)$ ფუნქციისათვის და ნებისმიერი ნატურალური m და n რიცხვებისათვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$\mathcal{E}_{m,n}(f)_{L_w^{p),\theta}} \leq c\Omega\left(f, \frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right)_{L_w^{p),\theta}} \qquad (4.3.11)$$

სადაც c არ არის დამოკიდებული m-ზე, n-ზე და f-ზე.

დამტკიცება. ლემა 4.3.2-ის გამოყენებით მივიღებთ:

$$\mathcal{E}_{m,n}(f)_{L_w^{p),\theta}} \leq \mathcal{E}_{m,n}(f - \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi) + \mathcal{E}_{m,n}(\varphi_1) + \mathcal{E}_{m,n}(\varphi_2) + \mathcal{E}_{m,n}(\varphi)$$
$$\leq c\left(\|f - \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi\| + \frac{1}{m^2}\left\|\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2}\right\| + \frac{1}{n^2}\left\|\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2}\right\| + \frac{1}{m^2 n^2}\left\|\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 y^2}\right\|\right).$$

თუ ავიღებთ ზუსტ ქვედა საზღვარს $\varphi_1, \varphi_2, \varphi$ ფუნქციების მიმართ, მივიღებთ

$$\mathcal{E}_{m,n}(f) \leq cK\left(f, \frac{1}{m}, \frac{1}{n}, p, w, 2,2\right)$$

თუ გამოვიყენებთ თეორემა 4.3.1-ში დამტკიცებულ შერეული ფუნქციონალის ზემოდან შეფასებას, დავასკვნით (4.3.11) უტოლობას.

გამოყენებული ლიტერატურა

1. R.Akgün Polynomial approximation of functions in weighted Lebesgue and Smirnov spaces, Georgian math .J. 11 (2011),no.2, 203-235.
2. R.Akgün and V.Kokilashvili. On converse theorem of trigonometric approximation in weighted variable exponent Lebesgue spaces . Banach J.Math.Analysis, 5 (2011), N_0. 1, 70-82.
3. R.Akgün and V.Kokilashvili. The refined direct and converse inequalities of trigonometric approximation in weighted variable exponent Lebesgue spaces, Georgian Math.J. 18 (2011), 399-423.
4. J.Akhiezer, Theory of Approximation, Ungar, New York, 1956.
5. P.Butzer and R.J.Nessel, Fourier Analysis and Approximations. Academic Press, New York, 1971.
6. A.P.Calderon and A. Zygmund, A note on the interpolation theorem of sublinear operators.Amer.J.Math.78 (1956),282-288.
7. S.O. Chaichenko. Best approximations of functions in generalized Lebesgue spaces, Ukr.Math.J. 64 (2012), N_0. 9, 1-17.
8. D.V. Cruz-Uribe and A.Fiorenza, Variable Lebesgue spaces, Birkhäuser, 2013, 312 pages.
9. F. Dai, Z. Ditzian and S. Tikhonov. Sharp Jackson inequality, Journal of Approx. Theory, 151 (2008), N_0. 1, 86-112.
10. F.Dai and Y.Xu, Approximation Theory and Harmonic Analysis on Spheres and Balls. Springer, 2013.
11. R.A. Devore and G.G. Lorentz, Constructive Approximation, Springer-Verlag, 1993.
12. L.Diening, P.Harjulechto, P.Hästö and M.Růžička. Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents, vol. 2017 of Lecture Notes in Mathematics. Springer, Heidelberg, 2011.
13. Z. Ditzian and S. Tikhonov, Note on order of approximation by Steklov means, Mosc.Univ.Math.Bull., 59 (2004), 47-48.
14. A. Fiorenza, B. Gupta and P. Jain, The maximal theorem in weighted grand Lebesgue spaces, Studia Math. 188 (2008), N_0. 2, 123-133.
15. L. Greco, T. Iwaniec and S. Sbordone, Inverting the p-harmonic operator. Manuscripta Math. 92 (1997) N_0. 2, 249-258.
16. E.A.Hadjieva,Investigation of the properties of functions with quasi-monotone Fourier coefficients in generalized Nikol'skii-Besov spaces, Authors summary of dissertation, Tbilisi,1986.
17. T. Iwaniec and C.Sbordone, On the integrability of the Jacobian under minimal hypothesis. Arch. Ration. Mech. Anal., 119 (2) (1992), 129-143.

18. V.Kokilashvili, Boundedness criteria for singular integrals in weighted grand Lebesgue spaces, Journal of Math. Sci. (Springer, New York), 170 (2010), N_0. 1, 20-33.
19. V.Kokilashvili, Singular integrals and strong maximal functions in weighted grand Lebesgue spaces. In: Nonlinear analysis, function spaces and applications.V.9, Prague: Acad. Sci. Czech Republic Inst. Math., 2011, 261-269
20. V.Kokilashvili and Y. Ildirir. On the approximation by trigonometric polynomials in weighted Lorentz spaces, Function Spaces & Appl, 8 (2010), N_0. 1.
21. V.Kokilashvili, D. Israfilov and S. Samko, Approximations in weighted Lebesgue and Smirnov classes with variable exponents . Proc.A.Razmadze Math.Inst. 143 (2007), 25-35.
22. V. Kokilashvili and M. Krbec. Weighted inequalities in Lorentz and Orlicz spaces, World Scientific, 1991.
23. V.Kokilashvili and A.Meskhi. Maximal and Calderon-Zygmund operators in grand variable exponent Lebesgue spaces. Georgian math. J. 21 (2014), N_0.4, 447-461.
24. V.Kokilashvili and A.Meskhi. Potentials with product kernels in grand Lebesgue spaces. One weighted criteria. Lithunian Math.J. 53 (2013), N_0. 1, 27-39.
25. V.Kokilashvili, A.Meskhi, S.Samko and H.Rafeiro. Integral operators in non-standard function spaces. Vol.I. Variable exponent Lebesgue and Amalgam spaces. Birkhäuser, 1-576 (to appear in 2016)
26. V.Kokilashvili, A.Meskhi, S.Samko and H.Rafeiro. Integral operators in non-standard function spaces. Vol.II. Variable exponent Hölder, Morrey-Campanato and Grand spaces, Birkhäuser, 577-1005 (to appear in 2016)
27. V. Kokilashvili and V. Paatashvili, Boundary Value Problems for analytic amd harmonic functions in non-standard Banach functions spaces, Nova Science Publ, New York, 2011.
28. V.Kokilashvili and S. Samko, Boundedness of weighted singular integrals in grand Lebesgue spaces. Georgian Math.J. 18 (2011), N_0. 2, 259-269.
29. V.Kokilashvili and S.Samko, Operators of harmonic analysis in weighted spaces with non-standard growth.J.Math.Anal.Appl. 352 (2009), N_0. 1, 15-34.
30. V.Kokilashvili and S.Samko, Singular integrals in weighted Lebesgue spaces with variable exponent, Georgian Math.J. 10 (2003), N_0. 1, 145-156.
31. V.Kokilashvili and S.Samko. Maximal and fractional operators in weighted $L^{p(x)}$ spaces. Revista Math. Iberoamericana 20 (2014), N_0.2, 493-515.
32. A.A. Konyuškov, Best approximations by trigonometric polynomials and Fourier coefficients. Mat.Sb.N.S. 44 (86) (1958), 53-84 (in Russian).
33. D.S.Kurtz, Littlewood-Paley and multiplier theorems in weighted L^p spaces. Trans.Amer.Math.Soc. 259 (1980), 235-263.

34. B. Muckenhoupt, Weighted norm inequalities for the Hardy maximal functions, Trans.Amer.Math.Soc. 165 (1972), 207-226.
35. B. Muckenhoupt and R.L. Wheeden, Weighted norm inequalities for fractional integrals, Trans.Amer.Math.Soc. 192 (1974), 261-276
36. I.P. Natanson, Constructive Theory of functions, University of Michigan University Library, 1961, 592 pages.
37. S.M.Nikol'skii, Approximation of functions of several variables and imbedding theorems, Moscow,1969 (in Russian)
38. S.M. Nikol'skii. The inequalities for entire functions of finite order and their applications in the theory of differentiable functions of several variables.Trudy Mat. Inst. imeni V.A. Steklova AN SSSR, 38(1951), 244-278.
39. M.K.Potapov, Approximation by „angle", Proceedings of the Conference on the Constructive Theory of Functions(Approximation Theory)(Budapest, 1969),pp.371-399. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1972.(Russian)
40. S.Samko, A.A. Kilbas and O.I. Marichev. Fractional integrals and derivatives. Gordon and Breach Science Pullishers, Yverdon, 1993.
41. I.I. Sharapudinov, Approximation of function in $L_{2\pi}^{p(x)}$ by trigonometric polynomials, Izv. RAN, Ser. Mat. 77 (2013), 2, 197-224 (in Russian)
42. I.I Sharapudinov. Approximation of smooth functions in $L_{2\pi}^{p(x)}$ by Valle-Poisson means, Izv.Sarat.Univ. 13 (2012), N_0. 1, 45-49.
43. I.I. Sharapudinov, On uniform boundedness in $L^p\big(p = p(x)\big)$ of some families of convolution oparators, Mat.Zametki, 59 (1996), 2, 291-302. (in Russian)
44. I.I Sharapudinov, Some problems of approximations in Lebesgue spaces whith variable exponent, Itogi Nauki, Iug Rosii, RAN, 2012, Vladikavkaz, IUMI, 264 pages (in Russian).
45. I. I. Sharapudinov, The topology of the spaces $L^{p}(t)[0,1]$. Math. Notes, 26(1979) No.3-4,796-806 (in Russian)
46. B. Simonov and S. Tikhonov , On embeddings of functional classes defined by constructive characteristics, Banach Center Publications, 72 (2006), 285-307.
47. S.B. Stechkin, On the best approximation of conjugate functions by trigonometric polynomials, Izv.AN SSSR, 20 (1958), 197-206.
48. M.F. Timan, On Jackson's theorem in L^p spaces, Ukrain.Mat.Zh. 18 (1996), N_0. 1, 134-137.(in Russian)
49. M.F. Timan, Best approximations of functions and linear summability methods of Fourier Series, Izv. Akad.Nauk SSSR, Ser.Mat. 29 (1965), 587-604.
50. M.F. Timan, Inverse theorems of constructive theory of functions in L^p spaces $(1 \le p < \infty)$. Mat.Sb.N.S. 46 (88), (1958), 125-132.(in Russian)
51. A.F.Timan, Theory of approximation of functions of a real variable. Macmillan, New York, 1963.

52. L.Zhizhiashvili, Trigonometric Fourier Series and Their Conjugates, Kluwer Academic Publisher, 1996.
53. A.Zygmund, Trigonometric Series, Volumes I and II, Cambridge University Press, 1959.

სადისერტაციო ნაშრომის შინაარსი გადმოცემულია შემდეგ სტატიებში

1. N.Danelia and V.Kokilashvili. Approximation by trigonometric polynomials of fractional derivatives of periodic functions and the properties, of conjugate functions in $L^{p(x)}$ spaces when $\min p(x) = 1$. Bulletin of Georgian Nat. Academy of Sci. 9 (2015) No.3.
2. N.Danelia and V.Kokilashvili. Approximation by trigonometric polynomials in the framework of grand variable exponent Lebesgue spaces. Georgian Math. J. 23 (2016) No.1. (იბეჭდება)
3. N.Danelia and V.Kokilashvili. Approximation of periodic functions in grand variable exponent Lebesgue spaces. Proc. A.Razmadze Math. Inst. 164 (2014), 100-103.
4. N.Danelia and V.Kokilashvili and Ts.Tsanava. Some approximation results in subspace of weighted grand Lebesgue spaces. Proc. A.Razmadze Math. Inst. 164 (2014), 104-108.